Side 9 sætningen:

Kolmogorov's konsistensætning

Tue Tjur, Institut for Matematisk Statistik

Advarsel: I denne artikel gives udtryk for holdninger til sandsynlighedsregningens grundlag. Disse er forfatterens egne sære meninger, og repræsenterer f.eks. ikke et generelt dansk eller københavnsk fænomen.

Kolmogorov's konsistenssætning er — uanset hvad Peter Thejlls figurer mener om den sag — det grundlæggende redskab til konstruktion af sandsynlighedsfordelinger på uendeligt dimensionale rum.

Eksempel. Alle kender vel den påstand, at hvis man kaster en mønt mange gange vil den relative hyppighed af "plat" ligge nær ved $\frac{1}{2}$. Spekulerer man lidt nøjere over den, vil man se at den kan tillægges i hvert fald tre fortolkninger:

(1) Som en ren naturlov, dvs. en egenskab ved mønter og møntkastere der hverken kan bevises eller modbevises matematisk, men som (måske) kan eftervises eksperimentelt. Det vil vi ikke diskutere yderligere her.

(2) Som en egenskab ved den matematiske model til beskrivelse af et antal kast med en mønt: Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uafhængige stokastiske variable som antager værdierne 0 og 1 med sandsynlighed $\frac{1}{2}$. For ethvert $\epsilon > 0$ gælder da

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon\right) \to 1$$

for $n \to \infty$. Dette er et velkendt specialtilfælde af *de store tals lov.*

(3) Som en egenskab ved en matematisk model, der beskriver en uendelig serie af møntkast: Lad $X_1, X_2, \ldots$ være uafhængige stokastiske variable, som antager værdierne 0 og 1 med sandsynlighed $\frac{1}{2}$. Da gælder

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Dette følger af den såkaldte *stærke form af de store tals lov.*

Man skal holde hovedet koldt for at fatte forskellen mellem (2) og (3). Men gør man det, vil man se at der er stor forskel. (2) er et resultat, som kan formuleres og bevises indenfor rammerne af elementær sandsynlighedsregning. (3) er derimod et udsagn om en sandsynlighedsfordeling på rummet $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ af 0–1–følger, og det er her Kolmogorov's konsistenssætning kommer ind i billedet. I dette simple tilfælde kan man ganske vist snyde sig fra brugen af denne sætning, ved at tænke på $X_1, X_2, \ldots$ som følgen af cifre i dualbrøkfremstillingen af et ligefordelt tal i enhedsintervallet. Men det resultat, som i almindelighed må anvendes til konstruktion af *stokastiske processer* med *endeligt tilstandsrum* og *diskret* (d.v.s. numerabel) *tidsskala* er følgende variant af Kolmogorov's konsistenssætning:

Sætning 1. *Lad E være en endelig, T en numerabel mængde (tænk på $E = \{0,1\}, T = \mathbf{N}$). Lad der for hver endelig delmængde T_0 af T være givet en sandsynlighedsfordeling P_{T_0} på den endelige mængde E^{T_0}, og antag at disse sandsynlighedsfordelinger udgør en konsistent familie, i den forstand at de optræder som marginalfordelinger for hinanden på naturlig måde; d.v.s. for $T_0' \subseteq T_0$ er $P_{T_0'}$ netop den fordeling, der fås ved transformation af P_{T_0} med den naturlige projektion $E^{T_0} \to E^{T_0'}$. Da findes et entydigt sandsynlighedsmål P på E^T, der som sine endeligt dimensionale marginalfordelinger netop har de givne fordelinger P_{T_0}.*

Sætningen forudsætter naturligvis en række definitioner og præciseringer, af hvilke den vigtigste er definitionen af, hvad vi forstår ved en sandsynlighedsfordeling på følgerummet E^T. Der findes flere fornuftige bud på en sådan definition, og da de i dette tilfælde er stort set ækvivalente, kan vi passende vælge den, som er i overensstemmelse med Kolmogorov's aksiomatisering af sandsynlighedsregningen og den overvejende del af litteraturen: En sandsynlighedsfordeling på E^T er en additiv ($P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ for $A \cap B = \emptyset$), σ–kontinuert ($P(A_n) \to 0$ for A_n aftagende mod $\emptyset$) og normeret ($P(E^T) = 1$) mængdefunktion på cylinder–σ–algebraen (= det mindste system af mængder som er lukket overfor numerable mængdeoperationer og indeholder de mængder, som er bestemt ved betingelser på endeligt mange koordinater).

Indenfor σ–algebraerne og de σ–additive mængdefunktioners univers ligger det nu lige for at formulere følgende generalisering:

"Sætning" 2. *Lad $(E_t, \mathcal{A}_t)$, $t \in T$, være en familie af "målelige rum", d.v.s. mængder E_t forsynet med σ–algebraer $\mathcal{A}_t$. Lad der for hver endelig delmængde T_0 af T være givet en sandsynlighedsfordeling P_{T_0} på rummet $\prod_{t \in T_0} E_t$, defineret på den σ–algebra (produkt–σ–algebraen) der naturligt frembringes af de givne σ–algebraer $\mathcal{A}_t$. Antag at disse sandsynlighedsfordelinger udgør en konsistent familie, jvf. sætning 1. Da findes et entydigt sandsynlighedsmål P på $\prod_{t \in T} E_t$, defineret på cylinder–σ–algebraen, der som sine endeligt dimensionale marginalfordelinger netop har de oprindelige fordelinger P_{T_0}.*

Denne sætning, som man mere højtidelig kunne kalde "sætningen om eksistens af projektive grænser i kategorien af abstrakte sandsynlighedsfelter" har frem for alt den egenskab, at den er forkert. Den gælder ikke engang når T er numerabel. Man kan, med lidt god vilje, sige at den kun gælder under "passende regularitetsbetingelser" (f.eks. når rummene E_t er endelige, jvf. sætning 1, eller for $E_t = \mathbf{R}$). Med lidt ond vilje kan man sige, at når denne fundamentale sætning ikke gælder, så er der noget helt galt med definitionen af en sandsynlighedsfordeling som et abstrakt mål (d.v.s. en σ–additiv mængdefunktion på en σ–algebra).

Det sidste synspunkt er jo lidt ukonstruktivt, med mindre man kan komme med en bedre idé. Det kan man faktisk. Betragt følgende smukke (og rigtige) resultat:

SÆTNING 3. *Lad E_t, $t \in T$, være kompakte topologiske rum (T en vilkårlig mængde). Lad $\mathcal{C}$ betegne vektorrummet af kontinuerte reelle funktioner på produktrummet $\prod_{t\in T} E_t$ (som ifølge Tychonov's sætning igen er et kompakt topologisk rum). Lad $\mathcal{C}_0$ betegne underrummet af $\mathcal{C}$ bestående af de funktioner, der kun afhænger af endeligt mange variable, og lad $\mu_0 \colon \mathcal{C}_0 \to \mathbf{R}$ være en lineær afbildning som er ikke–negativ ($f \geq 0 \implies \mu_0(f) \geq 0$) og normeret ($\mu_0(1) = 1$). Da kan μ_0 på entydig måde udvides til en ikke–negativ, normeret lineær afbildning $\mu \colon \mathcal{C} \to \mathbf{R}$.*

Dette er min yndlingssætning, først og fremmest fordi den kan opfattes som resultat*et* bag samtlige eksisterende versioner af Kolmogorov's konsistenssætning. Ligheden med sætning 1 og 2 er måske ikke slående, men sammenhængen er nu ikke svær at forstå. Definer et *Radon mål* på et kompakt topologisk rum E som en lineær, ikke–negativ funktional på rummet $\mathcal{C}$ af kontinuerte funktioner $f \colon E \to \mathbf{R}$. En sådan funktional kan på naturlig måde (ved anvendelse af en passende integrationsteori) udvides til en funktional på et betydeligt større rum af reelle funktioner på E. Dette funktionsrum indeholder bl.a. indikatorfunktioner for en stor klasse af delmængder af E, og herved får man til Radon målet knyttet en additiv mængdefunktion $A \to \mu(A)$ $(= \mu(1_A))$ på et system af delmængder, som bl.a. omfatter Borel–mængderne (d.v.s. mængderne i Borel–σ–algebraen, den mindste σ–algebra som indeholder alle åbne mængder). Denne mængdefunktion viser sig at have den særlige egenskab, at den er *regulær*, d.v.s. $\mu(A) = \sup_K \mu(K)$, hvor supremum tages over de kompakte delmængder K af A. Omvendt gælder (i store træk), at en additiv, regulær mængdefunktion svarer til et Radon mål på denne måde. Hvis man, under anvendelse af denne sammenhæng, oversætter sætning 3 til et resultat om mængdefunktioner, får man en version af Kolmogorov's konsistenssætning, hvor rummene E_t er kompakte topologiske rum og de givne sandsynlighedsmål P_{T_0} og det resulterende P er additive, regulære mængdefunktioner.

Som grundlag for teorien for stokastiske processer er dette resultat langt mere effektivt end de forskellige varianter af sætning 2. Det hænger bl.a. sammen med, at Borel–σ–algebraen i tilfælde af kontinuert tid (f.eks. $T = \mathbf{R}$) er meget større end cylinder–σ–algebraen. Hændelser som "$X_t = 0$ for alle t" eller "udfaldsfunktionen $t \to X_t$ er kontinuert" vil f.eks. ikke være indeholdt i cylinder–σ–algebraen, hvilket har givet anledning til mange snørklede og helt unødvendige konstruktioner i teorien for stokastiske processer. Det er naturligvis en begrænsning, at sætning 3 kun handler om kompakte tilstandsrum E_t, men det viser sig at være et mindre problem (som kan løses ved kompaktificering).

Historiske bemærkninger. Man kan undre sig over, at sandsynlighedsregningens hovedstrøm den dag idag hovedsageligt baseres på abstrakt målteori. Kun i grænseområdet mellem sandsynlighedsregning og funktionalanalyse ser man en effektiv udnyttelse af teorien for Radon mål. Forklaringen er ikke kun den enkle, at sandsynlighedsteoretikere er nogle klamphuggere, som bliver svimle hvis de ser noget som er mere abstrakt end et metrisk rum. Indenfor sandsynlighedsregningen finder man ret skrappe matematikere, som arbejder med ting der er betydeligt mere indviklede end den forholdsvis kanoniske teori for Radon mål.

Historisk kan målteorien siges at begynde med H. Lebesgues præcisering og generalisering af det klassiske integralbegreb (1902 og 1904). Da Lebesgues teori af blandt andre M. Frechét (1915) blev generaliseret til en teori for mål på “abstrakte mængder” faldt det naturligt at basere måleligheds– og integrationsbegreberne på σ–kontinuiteten, som Lebesgue lagde stor vægt på. Ganske vist kan vi nu — med den bagklogskab det giver at være 80 år for sent ude — let se, at Lebesgue’s bevis for σ–kontinuiteten blot var et specialtilfælde af det argument, som viser at en regulær, additiv mængdefunktion er σ–kontinuert. Regularitet kommer altså i virkeligheden før σ–kontinuitet, og er derfor måske et mere naturligt udgangspunkt for en generalisering. Men de centrale kompakthedsargumenter er ikke lette at få øje på i Lebesgues originale arbejder, hvor alting formuleres ved hjælp af følger. Den generelle topologi var ikke formuleret endnu, og behovet for en mere dybtgående analyse af problemet har vel heller ikke været til stede, eftersom begreberne “σ–algebra” og “σ–kontinuitet” syntes at give en fuldstændig generalisering af Lebesgues resultater. Det er først når man begynder at danne projektive grænser, det går galt.

Det måtte A. N. Kolmogorov erkende, da han i sin berømte monografi (1933) om sandsynlighedsregningens grundlag måtte indskrænke sig til at bevise konsistenssætningen (som her blev klart formuleret for første gang) i tilfældet $E_t = \mathbf{R}$. Det har uden tvivl generet ham, for hans bestræbelser gik jo netop ud på at samle diskrete, kontinuerte og uendeligt dimensionale sandsynlighedsmodeller under den fælles hat “abstrakt målteori”. Men hans bevis for konsistenssætningen indeholder et helt nødvendigt topologisk argument, som ikke kan overføres til det “abstrakte” tilfælde.

Her kommer vi til et væsentligt dansk bidrag. Det var Erik Sparre Andersen og Børge Jessen, der i 1948 ved et modeksempel beviste, at sætning 2 ikke er generelt gyldig. Det kom desværre lidt for sent til at få konsekvenser for sandsynlighedsteoretikeres holdning til grundlaget. Et meget vægtigt bidrag til udviklingen er J. L. Doob’s bog fra 1953, der helt igennem (d.v.s. så vidt muligt) er baseret på abstrakt målteori. Processer med kontinuert tid er her, ifølge sagens natur, behandlet med lodder og trisser samt et usædvanligt rædselsfuldt begreb “separabilitet”, hvis eneste eksistensberettigelse er valget af den abstrakte målteori som basis for sandsynlighedsregningen. Senere har udviklingen bevæget sig i retning af en mere topologisk indfaldsvinkel, idet Yu. V. Prohorov (1956) og senere P. Billingsley (1968) redegjorde for, hvorledes man i en lang række situationer kan begrænse sig til abstrakte mål på Borel–σ–algebraer i fuldstændigt metriserbare funktionsrum med numerabel basis for topologien. På sådanne rum er alle abstrakte mål regulære, så man får mulighed for at udnytte fordelene ved Radon mål; uden dog at sige det eksplicit, og uden direkte reference til den generelle konsistenssætning (sætning 3).

Man kan således sige, at Radon målenes teori kom for sent. En systematisk fremstilling af mål– og integrationsteorien baseret på Radon mål blev givet af franske matematikere under pseudonymet Bourbaki i 1952. Før da er bidragene spredte. Grundlaget er F. Riesz's repræsentationssætning (1909), der i tilfældet $E = [0, 1]$ gav fremstillingen af en lineær funktional på $\mathcal{C}$ ved et "Stieltjes–integral" (d.v.s. et integral m.h.t. en fordelingsfunktion). Dette resultat for funktioner på enhedsintervallet blev af J. Radon (1913) generaliseret til tilfældet hvor E er en vilkårlig kompakt delmængde af $\mathbf{R}^n$. Herfra stammer begrebet regularitet, og betegnelsen "Radon mål" skyldes naturligvis denne artikel. Den fundamentale sætning 3 blev vist af P. J. Daniell i 1920 (for $E_t = [0, 1]$ og $T = \mathbf{N}$, men beviset dækker i alt væsentligt også det generelle tilfælde). Men hverken Daniell eller Kolmogorov synes at have sat dette resultat i forbindelse med sandsynlighedsregningen.

I 1957 — altså nogle år efter Doob's systematisering af teorien for stokastiske processer og Bourbaki's fremstilling af integrationsteorien baseret på Radon mål — redegjorde E. Nelson for, hvorledes teorien for stokastiske processer med kontinuert tid kan simplificeres betydeligt ved brug af Radon mål. Senere bind af Bourbaki har gjort opmærksom på det samme. Men disse arbejder har indtil videre ikke sat sig synlige spor i den egentlige sandsynlighedsregningslitteratur, og det samme gælder mit eget beskedne bidrag fra 1980. Selv franske sandsynlighedsteoretikere, som ellers ikke går af vejen for at introducere lidt matematik, når der er brug for det, er utilbøjlige til at tage skridtet fuldt ud og afskrive den abstrakte målteori. Man kan undertiden få det indtryk, at det skyldes ærbødighed for gamle kæmper som Kolmogorov og Doob. Som om deres autoritet var af den slags, man kan komme til at ødelægge ved en fejltagelse!

Litteratur. I stedet for den meget lange litteraturliste, som egentlig burde følge her, vil jeg beskedent nøjes med at give en reference til mig selv. Heri kan man finde præcise henvisninger til alle de bøger og artikler, som er omtalt:

Tjur, T. (1980). *Probability Based on Radon Measures.* Wiley.