Eksamen juni 2001, Opgave 2

(a)

Tætheden bliver (ssr. side 75)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ for } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

(det er også OK at skrive $p(x) = \frac{1}{2}$*, hvis man udtrykkeligt gør opmærksom på at der er tale om en fordeling på [-1,1]).*

$$\mathrm{E}X = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x \, dx = 0.$$

(her vil det også være OK at sige at $\mathrm{E}X = 0$ *af symmetrigrunde eller lignende).*

Da

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

får vi

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\mathrm{E}Y = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^x \, dx = \frac{1}{2} \left[e^x\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e}\right) (= 1.175).$$

(c)

Transformationen givet ved $y = e^x$ afbilder åbenbart intervallet [-1,1] voksende og kontinuert differentiabelt over på intervallet $[e^{-1}, e]$. Ved sædvanlig endimensional transformation fås derfor, at tætheden for Y på intervallet $[e^{-1}, e]$ er givet ved

$$q(y) = \frac{p(x)}{dy/\,dx} = \frac{1/2}{e^x} = \frac{1}{2y}.$$

Udenfor dette interval er den naturligvis 0.