Opgave 1

En reel funktion på $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$ defineres ved
$p(1,1) = \frac{1}{18}$
$p(1,2) = \frac{3}{18}$
$p(1,3) = \frac{2}{18}$
$p(2,1) = \frac{2}{18}$
$p(2,2) = \frac{6}{18}$
$p(2,3) = \frac{4}{18}$
Lad (X,Y) være en stokastisk variabel på $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$ med denne sandsynlighedsfunktion.

(a) Angiv de marginale fordelinger af X og Y.

Med betegnelserne p_X og p_Y for de to sandsynlighedsfunktioner får vi
$p_X(1) = P(X=1) = \frac{1}{18} + \frac{3}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{3}$,
$p_X(2) = P(X=2) = \frac{2}{18} + \frac{6}{18} + \frac{4}{18} = \frac{2}{3}$.
og
$p_Y(1) = P(Y=1) = \frac{1}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{6}$,
$p_Y(2) = P(Y=2) = \frac{3}{18} + \frac{6}{18} = \frac{3}{6}$,
$p_Y(3) = P(Y=3) = \frac{2}{18} + \frac{4}{18} = \frac{2}{6}$.

(b) Gør rede for at X og Y er stokastisk uafhængige.

Betingelsen for uafhængighed

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

ses umiddelbart at være opfyldt.

(c) Udregn middelværdi og varians for $X+Y$.

Da
$\mathrm{E}X = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 2 = \frac{5}{3}$
og
$\mathrm{E}Y = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{3}{6} \times 2 + \frac{2}{6} \times 3 = \frac{13}{6}$
får vi
$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y = \frac{5}{3} + \frac{13}{6} = \frac{23}{6}$.
Da X og Y er uafhængige kan vi på tilsvarende måde udregne variansen på summen som summen af varianserne. Vi får
$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 4 = 3$

og

$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{3}{6} \times 4 + \frac{2}{6} \times 9 = \frac{31}{6}$

hvoraf

$\mathrm{var}(X) = 3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

og

$\mathrm{var}(Y) = \frac{31}{6} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{17}{36},$

og dermed

$\mathrm{var}(X + Y) = \frac{2}{9} + \frac{17}{36} = \frac{25}{36}.$