Opgave 2, eksamen juni 2002.

(a)

Transformationen $y = r^3$ afbilder $[0,1]$ bijektivt, voksende og kontinuert differentiabelt på $[0,1]$. Med de sædvanlige betegnelser $p(r)$ og $q(y)$ for tæthederne for henholdsvis R_1 og Y_1 har vi, for r og (dermed) y mellem 0 og 1,

$$\frac{dy}{dr} = 3r^2 = 3y^{2/3}$$

og dermed

$$q(y) = p(r) / \frac{dy}{dr} = 1/(3y^{2/3}) = \frac{1}{3} y^{-2/3}.$$

Hvis vi opfatter Y_1 som en stokastisk variabel på hele $\mathbf{R}$ bliver tætheden således

$$q(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} y^{-2/3} \text{ for } y \in [0,1], \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

(b)

$$\mathrm{E}Y_1 = \mathrm{E}\left(R_1^3\right) = \int_0^1 r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{E}\left(Y_1^2\right) = \mathrm{E}\left(R_1^6\right) = \int_0^1 r^6\, dr = \left[\frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}.$$

$$\mathrm{var}\left(Y_1\right) = \mathrm{E}\left(Y_1^2\right) - \left(\mathrm{E}Y_1\right)^2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{16} \left(= \frac{9}{112}\right).$$

(c) På grund af uafhængigheden er

$$P\left(Y_1 \leq 0.5 \text{ og } Y_2 \leq 0.5\right) = P\left(Y_1 \leq 0.5\right)^2 = P\left(R_1 \leq 0.5^{1/3}\right)^2$$

$$= \left(0.5^{1/3}\right)^2 = 0.5^{2/3} \; (= \mathbf{0.62996}).$$