

Reeksamen august 2002, Opgave 3

(a)

Forudsætningerne for den ensidede variansanalysemodel er at observationerne i hver gruppe kan antages at stamme fra en normal fordeling, hvor varianserne i de to grupper skal være ens. Antagelsen om normalitet kan undersøges grafisk (men det kræves ikke her). Med henblik på at udføre Bartlett's test for varianshomogenitet udregner vi først

$$SSD_1 = 129830.91 - 1768.7^2/25 = 4698.9224,$$

$$SSD_2 = 164338.56 - 1993.2^2/25 = 5424.7104.$$

Hvis vi sammenligner de to varianser ved hjælp af et tosidet F-test skal vi bruge forholdet mellem største og mindste varians

$$\frac{5424.7104/24}{4698.9224/24} = 1.1545$$

som er alt for tæt på 1 til at være signifikant i en F-fordeling med (24,24) frihedsgrader (dette fremgår dog kun indirekte af tabellerne i sandsynlighedsregningsnoterne, med mindre man indsætter i en kompliceret formel). Alternativt kan man foretage det egentlige Bartlett's test, hvor teststørrelsen

$$\frac{(50 - 2) \log \frac{4698.92 + 5424.71}{50 - 2} - (25 - 1) \log \frac{4698.92}{25 - 1} - (25 - 1) \log \frac{5424.71}{25 - 1}}{1 + \frac{1}{3(2-1)} \left(\frac{1}{25-1} + \frac{1}{25-1} - \frac{1}{50-2} \right)}$$

= 0.12115 vurderes ensidet i en χ^2 -fordeling med 1 frihedsgrad — hvor den er klart insignifikant, idet 95%-fraktilen i denne fordeling er 3.841. Vi kan således uden forbehold godkende hypotesen om at de to varianser er ens.

(b)

De to middelværdier μ_1 og μ_2 estimeres på sædvanlig måde ved de tilsvarende gruppegennemsnit, altså

$$\hat{\mu}_1 = 1768.7/25 = 70.748,$$

$$\hat{\mu}_2 = 1993.2/25 = 79.728.$$

Estimatet for variansen i modellen er

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{4698.92 + 5424.71}{50 - 2} = 210.9090.$$

95% sikkerhedsgrenser for de to middelværdier får vi således, efter ved opslag (evt. med interpolation) at have konstateret at 97.5% fraktilen i T-fordelingen med 48 frihedsgrader er 2.010, efter formlerne

$$\mu_1 = 70.748 \pm 2.010 \sqrt{\frac{210.9090}{25}} = 70.748 \pm 5.838$$

svarende til sikkerhedsintervallet $[64.910, 76.586]$, og

$$\mu_2 = 79.728 \pm 2.010 \sqrt{\frac{210.9090}{25}} = 79.728 \pm 5.838$$

svarende til sikkerhedsintervallet $[73.890, 85.566]$.

(c)

Test for homogenitet foretages lettest (eftersom der kun er to grupper) som et T-test:

$$T = \frac{79.728 - 70.748}{\sqrt{(\frac{1}{25} + \frac{1}{25}) \times 210.9090}} = 2.1862.$$

Denne størrelse skal vurderes (tosidet) i en T-fordeling med 48 frihedsgrader. Som vi allerede har set er 97.5% fraktilen i denne fordeling 2.010. Det betyder at forskellen mellem de to middelværdier er (omend svagt) signifikant forskellig fra 0. Lidt forbavsende er det de gamle batterier som giver længst taletid. Forsøgets konklusion er altså, at de gamle batterier ser ud til at holde opladningen længere end de nye. Konklusionen bygger på en ret svag signifikans, så hvis det kun gjaldt spørgsmålet om der er forskel burde man måske overveje et lidt større forsøg af samme type. Til gengæld ser det ud som om man med ret stor sikkerhed kan konkludere, at de nye batterier ikke kan være *betydeligt* bedre end de gamle.

Testet for homogenitet kan naturligvis også foretages som et F-test. Vi udregner

$$\text{SSD}_{\text{res}} = 129830.91 + 164338.56 - (1768.7 + 1993.2)^2/50 = 11131.638$$

og får så teststørrelsen

$$f = \frac{11131.638 - (4698.92 + 5424.71)}{210.9090} = 4.7794$$

som skal vurderes i en F-fordeling med (1,48) frihedsgrader. Her ligger 95%-fraktilen i 4.04 medens 99%-fraktilen er 7.20, så vi får samme konklusion (svag signifikans).