Eksamen juni 2003, Opgave 1

(a)

Da fordelingen af X er symmetrisk omkring 0 er $\mathrm{E}(X) = 0$. Dette svar er fuldt tilstrækkeligt, men den direkte udregning

$$\mathrm{E}(X) = 0.1 \times (-2) + 0.3 \times (-1) + 0.2 \times 0 + 0.3 \times 1 + 0.1 \times 2 = 0$$

er naturligvis også acceptabel.
Da middelværdien således er 0 får vi

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) = 0.1 \times (-2)^2 + 0.3 \times (-1)^2 + 0.2 \times 0^2 + 0.3 \times 1^2 + 0.1 \times 2^2$$

$$= 0.1 \times 4 + 0.3 \times 1 + 0.2 \times 0 + 0.3 \times 1 + 0.1 \times 4 = \mathbf{1.4}$$

Tilsvarende fås

$$\mathrm{E}(X^4) = 0.1 \times (-2)^4 + 0.3 \times (-1)^4 + 0.2 \times 0^4 + 0.3 \times 1^4 + 0.1 \times 2^4$$

$$= 0.1 \times 16 + 0.3 \times 1 + 0.2 \times 0 + 0.3 \times 1 + 0.1 \times 16 = \mathbf{3.8}$$

(b)

De mulige værdier af X^2 er åbenbart 0, 1 og 4, og punktsandsynlighederne i fordelingen af X^2 ses at være givet ved

$P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0.2$
$P(X^2 = 1) = P(X \in \{-1, 1\}) = 0.3 + 0.3 = 0.6$
$P(X^2 = 4) = P(X \in \{-2, 2\}) = 0.1 + 0.1 = 0.2$

(c)

Betingning med hændelsen $\{X^2 \leq 1\}$ begrænser de mulige udfald af X til -1, 0 og 1, og den betingede fordelings punktsandsynligheder bliver

$P(X = -1 \mid X^2 \leq 1) = \frac{0.3}{0.3+0.2+0.3} = \frac{3}{8} = 0.375$
$P(X = 0 \mid X^2 \leq 1) = \frac{0.2}{0.3+0.2+0.3} = \frac{2}{8} = 0.250$
$P(X = 1 \mid X^2 \leq 1) = \frac{0.3}{0.3+0.2+0.3} = \frac{3}{8} = 0.375$