

Eksamen juni 2003, Opgave 2

(a)

Vi skal vise at $F(x)$ kan skrives på formen

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(z) dz$$

hvor p er en sandsynlighedstæthed på $\mathbf{R}$. Ved differentiation fås, at der nødvendigvis må gælde

$$p(x) = F'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

For den således definerede funktion $p(x)$ har vi umiddelbart $p(x) > 0$, og da dens stamfunktion $F(x)$ åbenbart opfylder

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

og

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

får vi umiddelbart at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(z) dz = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x p(z) dz = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(-x)) = 1.$$

Heraf følger, at $p(x)$ er en sandsynlighedstæthed, og at $F(x)$ er den tilhørende fordelingsfunktion.

(b)

Fordelingen af X er symmetrisk, idet

$$p(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = p(x).$$

Heraf følger at middelværdien af X må være 0, forudsat at den overhovedet er defineret. Men det er den, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} |x|p(-x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$$

$$\leq 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx < +\infty$$

(hvor det sidste integral jo er velkendt, som Γ -integral eller middelværdien i eksponentialfordelingen).

Hvad angår det andet spørgsmål har vi

$$P(2 + 5X > 0) = P\left(X > -\frac{2}{5}\right) = P(X > -0.4)$$

hvilket på grund af fordelings symmetri er det samme som

$$P(X \leq 0.4) = \frac{e^{0.4}}{1 + e^{0.4}} = \mathbf{0.5987}.$$

(c)

Det er lettest at opskrive fordelingsfunktionen: For $y \geq 0$ får vi

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(X \in [-y, y]) = 2P(X \in [0, y]) \\ &= 2(F(y) - F(0)) = 2\left(\frac{e^y}{1 + e^y} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ved differentiation fås således at tætheden for Y er

$$q(y) = \begin{cases} 2 \frac{e^y}{(1+e^y)^2} & \text{for } y \geq 0 \\ 0 & \text{for } y < 0 \end{cases}$$

Dette kan også indses ved direkte brug af transformationssætningen, eventuelt blot ved henvisning til opgave 5.4.6 i Ssr.