

Reeksamen august 2003, Opgave 1

(a)

Åbenbart er

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= \frac{1}{4}, \\P(X = 1) &= \frac{1}{2} \text{ og} \\P(X = 2) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dette kræver ingen yderligere begrundelse, da problemet er så simpelt. Men en korrekt begrundelse kunne f.eks. være, at ud af de fire lige sandsynlige udfald PP, PK, KP og KK fører netop ét (PP) til $X = 0$ og ét (KK) til $X = 2$, medens to (PK og KP) fører til $X = 1$. En anden begrundelse kunne være at X åbenbart er binomialfordelt med antalsparameter 2 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{2}$.

(b)

Fordelingen af (S_0, S_1, S_2) er åbenbart en polynomialfordeling af orden 3 med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Kræver heller ingen begrundelse, da situationen er præcis af den type som polynomialfordelingen er konstrueret til at beskrive.

Vi får således ved brug af det sædvanlige udtryk for polynomialfordelingens sandsynlighedsfunktion

$$\begin{aligned}P((S_0, S_1, S_2) = (3, 5, 2)) &= \binom{10}{3 \ 5 \ 2} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\&= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 4^5 \times 2^5} = 0.0769.\end{aligned}$$

(c)

S_1 er binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{2}$. Dette er blot en følge af binomialfordelingens definition, idet S_1 er antallet af "succes'er" hvis vi i hvert af de 10 (uafhængige, identisk fordelte) kast definerer succes som den hændelse, at netop én af de to mønter viser krone. Henvisning til opgave 3.4.3 i sandsynlighedsregningsnoterne er også OK, og det bør næppe trække ret meget ned hvis man slet ikke begrunder det.

Ifølge velkendte formler for middelværdi og varians i binomialfordelingen har S_1 således middelværdi

$$ES_1 = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

og standardafvigelse

$$\sqrt{10 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2.5} = 1.5811.$$