

Reeksamen august 2003, Opgave 2

(a)

Kravene til en tæthed er at den skal være ≥ 0 og have (i dette tilfælde multipelt) integral 1. Det er klart at $p(x, y) = \frac{1}{2} + 2xy$ er ≥ 0 , og integralet bliver

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2xy \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 2xy dx dy.$$

Her er det første led på højre side åbenbart $\frac{1}{2}$ (tætheden for ligefordelingen på enhedskvadratet er jo konstant lig med 1 og har integral 1), og det andet integral bliver

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 2xy dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 2xy dx \right) dy = \int_0^1 \left(2y \int_0^1 x dx \right) dy \\ &= \int_0^1 2y \times \frac{1}{2} dy = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vi får således

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2xy \right) dx dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(b)

I det kontinuerte tilfælde er enhver marginal fordeling igen en kontinuert fordeling, hvis tæthed man kan udregne ved at integrere de andre variable ud. I dette tilfælde bliver fordelingen af X altså den kontinuerte fordeling på $[0,1]$ med tæthed

$$q(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 2xy \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} dy + \int_0^1 2xy dy = \frac{1}{2} + x.$$

(c)

Af symmetri Grunde får Y i dette tilfælde samme marginale tæthed som X . Ifølge sin definition ville stokastisk uafhængighed i dette tilfælde betyde at vi havde relationen

$$\frac{1}{2} + 2xy = \left(\frac{1}{2} + x \right) \left(\frac{1}{2} + y \right).$$

som udtrykker at den simultane tæthed kan skrives som produkt af de marginale tætheder. Men det er klart at dette ikke kan være tilfældet (indsæt f.eks. $x = y = 0$, eller gang ud på højre side og bemærk at to polynomier kun kan være identiske hvis de har de samme koefficienter).