Eksamen juni 2004, Opgave 1

(a)

Eftersom

$$S = X_{(1)} + X_{(2)} + X_{(3)} = X_1 + X_2 + X_3$$

og X_1, X_2 og X_3 er uafhængige, identisk fordelte med

$$\mathrm{E}X_1 = 3.5$$

og

$$\mathrm{var}(X_1) = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2\right) - 3.5^2 = 35/12$$

fås

$$\mathrm{E}S = 3 \times 3.5 = 10.5$$

og

$$\mathrm{var}(S) = 3 \times 35/12 = 35/4 = 8.75.$$

(b)

For $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ fås

$$P\left(X_{(1)} \geq x\right) = P\left(X_1 \geq x \text{ og } X_2 \geq x \text{ og } X_3 \geq x\right)$$

$$= P\left(X_1 \geq x\right)^3 = \left(\frac{7-x}{6}\right)^3$$

hvoraf

$$P\left(X_{(1)} = x\right) = P\left(X_{(1)} \geq x\right) - P\left(X_{(1)} \geq x+1\right)$$

$$= \left(\frac{7-x}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-x}{6}\right)^3.$$

(gælder også for $x = 6$, som man let indser). Dette er sådan set svar nok. Men et lidt mere udførligt svar går ud på at angive de seks punktsandsynligheder:

$$P\left(X_{(1)} = 1\right) = \left(\frac{6}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.4213$$

$$P\left(X_{(1)} = 2\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = 0.2824$$

$$P\left(X_{(1)} = 3\right) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = 0.1713$$

$$P\left(X_{(1)} = 4\right) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 = 0.0880$$

$$P\left(X_{(1)}=5\right)=\left(\frac{2}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3=0.0324$$

$$P\left(X_{(1)}=6\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=0.0046$$

(c)

Den betingede fordeling af (X_1, X_2, X_3), givet at det højeste af de tre antal netop er 2, er ligefordelingen på mængden af udfald som netop giver maksimalt antal øjne 2. Altså de udfald hvor alle tre antal øjne er 1 eller 2, og mindst ét af dem netop er 2. Der er åbenbart 7 $(= 2^3 - 1)$ muligheder:

(1,1,2)
(1,2,1)
(1,2,2)
(2,1,1)
(2,1,2)
(2,2,1)
(2,2,2)

For netop 3 af disse er $X_1 = 1$. Så den betingede fordeling af X_1, givet $X_{(3)} = 2$, får punktsandsynlighederne

$$P\left(X_1=1 \mid X_{(3)}=2\right)=\frac{3}{7}$$

$$P\left(X_1=2 \mid X_{(3)}=2\right)=\frac{4}{7}$$