Eksamen juni 2004, Opgave 2

(a)

Det er klart at $p(x_1,x_2) \geq 0$, og

$$\int\int p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \frac{9}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x_1^2 x_2^2\,dx_1\,dx_2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x_1^2\,dx_1\right)\left(\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x_2^2\,dx_2\right) = \left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

Heraf følger at $p(x_1,x_2)$ er en sandsynlighedstæthed. Af den omskrivning vi har foretaget følger samtidig at den tilhørende todimensionale fordeling kan fortolkes som fordelingen af to uafhængige identisk fordelte variable med tæthed $\frac{3}{2}x^2$ på intervallet $[-1,1]$.

(b)

Af symmetrigrunde er $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2 = 0$. Variansen kan udregnes således:

$$\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(X_2) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2(x-0)^2\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{3}{2}\times\frac{2}{5} = \frac{3}{5}\,.$$

Kovariansen er 0, da de to variable er stokastisk uafhængige.

(c)

På grund af uafhængigheden bliver Y_1 og Y_2 også uafhængige, som funktion af hver sit X. Det er derfor lettest at udregne tæthederne for Y_1 og Y_2 hver for sig, og derefter kombinere dem til en simultan tæthed på sædvanlig måde.

$Y_1 = 2X_1$ har, ifølge formlen for transformation v.h.a. skala– (og positions–) parameter, tætheden

$$q_1(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{y_1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{16}y_1^2 & \text{for } y_1 \in [-2,2]\,, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

$Y_2 = X_2^2$ har ifølge den sædvanlige transformationssætning tæthed q_2 givet ved

$$q_2(y_2)|\,dy_2| = 2\times\frac{3}{2}x_2^2|\,dx_2|$$

hvor multiplikationen med 2 på højre side skyldes at transformationen $x_2 \to y_2 = x_2^2$ har originalmængder af formen $\{x_2 = \pm\sqrt{y_2}\}$ bestående af to punkter med samme tæthed. Vi får således, idet $\frac{|\,dx_2|}{|\,dy_2|} = \frac{1}{2|x_2|} = \frac{1}{2\sqrt{y_2}}$,

$$q_2(y_2) = 2\times\frac{3}{2}x_2^2\frac{|\,dx_2|}{|\,dy_2|} = 2\times\frac{3}{2}y_2\frac{1}{2\sqrt{y_2}} = \frac{3}{2}\sqrt{y_2}\,.$$

Dette er for $y_2 \in [0,1]$, udenfor enhedsintervallet er q_2 naturligvis 0. Den simultane tæthed for (Y_1, Y_2) er således givet ved

$$q_1(y_1)q_2(y_2) = \begin{cases} \left(\frac{3}{16}y_1^2\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{y_2}\right) & \text{for } (y_1, y_2) \in [-2,2] \times [0,1]\,, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$