Reeksamen august 2004, Opgave 1

(a)

p er en sandsynlighedsfunktion, idet $p(x) \geq 0$ for alle x og $\sum_{x \in \mathbf{R}} p(x) = 0.4 + 0.6 = 1$. Den tilhørende sandsynlighedsfordeling er pr. definition givet ved

$$P(A) = \begin{cases} 1 \text{ hvis både } -1 \in A \text{ og } 1 \in A \\ 0.4 \text{ hvis } -1 \in A \text{ men ikke } 1 \in A \\ 0.6 \text{ hvis } 1 \in A \text{ men ikke } -1 \in A \\ 0 \text{ hvis hverken } 1 \in A \text{ eller } -1 \in A \end{cases}$$

for $A \subseteq \mathbf{R}$.

Det ses at

$$\mathrm{E}X = 0.4 \times (-1) + 0.6 \times 1 = 0.2\,,$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - 0.2^2 = 1 - 0.04 = 0.96\,.$$

(b)

Af almindelige regneregler for middelværdier (Ssr. side 57) og varianser (Ssr. side 68) følger at

$$\mathrm{E}\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = 3\mathrm{E}X_1 = 3 \times 0.2 = 0.6\,,$$

$$\mathrm{var}\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = 3\mathrm{var}\left(X_1\right) = 3 \times 0.96 = 2.88$$

og

$$\mathrm{E}\left(2^{X_1+X_2+X_3}\right) = \mathrm{E}\left(2^{X_1}\right) \times \mathrm{E}\left(2^{X_2}\right) \times \mathrm{E}\left(2^{X_3}\right)$$

$$= \left(0.4 \times 2^{-1} + 0.6 \times 2^1\right)^3 = 1.4^3 = 2.744.$$

(c)

Summen $X_1 + X_2 + X_3$ kan kun være 3 hvis $X_1 = X_2 = X_3 = 1$. Betingning med hændelsen $X_1 + X_2 + X_3 = 3$ fører derfor til en udartet fordeling, så den betingede fordeling af X_1, givet $X_1 + X_2 + X_3 = 3$, er den udartede fordeling i 1.