Eksamen juni 2005, Opgave 1

(a)

Eftersom X_1 og X_2 er uafhængige, identisk fordelte med $\mathrm{E}X_i = 0$ og

$$\mathrm{var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) = \frac{1}{4} \times (-1)^2 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{2}\,,$$

er

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}X_1 + 2\mathrm{E}X_2 = 0$$

og

$$\mathrm{var}(S) = \mathrm{var}(X_1) + 2^2\mathrm{var}(X_2) = \frac{5}{2}.$$

(b)

De mulige værdier af S ses at være -3, -2, -1, 0, 1, 2 og 3. I de fleste tilfælde er (X_1, X_2) entydigt bestemt ved S, dog kan værdiene $S = -1$ og $S = 1$ hver fremkomme på to måder, den sidste for eksempel som $1 = 1 + 2 \times 0$ og $1 = -1 + 2 \times 1$. Hvilket jo også passer med at de $9 = 3 \times 3$ muligheder for (X_1, X_2) reducerer til 7 mulighede for S. Følgende skema viser de mulige værdier for (X_1, X_2), de tilsvarende punktsandsynligheder og den tilhørende værdi af S:

x_1	x_2	$P((X_1, X_2) = (x_1, x_2))$	$s = x_1 + 2x_2$
-1	-1	$1/16$	-3
-1	0	$1/8$	-1
-1	1	$1/16$	1
0	-1	$1/8$	-2
0	0	$1/4$	0
0	1	$1/8$	2
1	-1	$1/16$	-1
1	0	$1/8$	1
1	1	$1/16$	3

Sandsynlighedsfunktionen for S bliver således

$$\begin{aligned}
p(-3) &= & & 1/16 \\
p(-2) &= & & 1/8 \\
p(-1) &= & 1/8 + 1/16 = & \; 3/16 \\
p(0) &= & & 1/4 \\
p(1) &= & 1/16 + 1/8 = & \; 3/16 \\
p(2) &= & & 1/8 \\
p(3) &= & & 1/16
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0 \mid S = 1) &= \frac{P(X_2 = 0 \text{ og } S = 1)}{P(S = 1)} \\
&= \frac{P(X_2 = 0 \text{ og } X_1 = 1)}{P(S = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{16}} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$