

Eksamen juni 2005, Opgave 2

(a)

Lad F betegne fordelingsfunktionen for $X_{(2)}$. For $x \in [0, 1]$ har vi så

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X_{(2)} \leq x) = P(X_1 \leq x \text{ og } X_2 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = x^2. \end{aligned}$$

Hvis vi vil fortolke fordelingen som en fordeling på hele den reelle akse bliver således

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

Ved differentiation fås umiddelbart, at tætheden for $X_{(2)}$ bliver

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 2x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

(her er det også OK at henvise til Ssr. side 116–117).

(b)

At $X_{(1)} < 1/2$ og $X_{(2)} > 1/2$ betyder for de oprindelige variable at en af dem falder til venstre for $1/2$ og den anden til højre for $1/2$. Det kan ske på to måder, svarende til at sandsynligheden er sum af sandsynlighederne for to disjunkte hændelser,

$$\begin{aligned} &P\left(X_1 < \frac{1}{2} \text{ og } X_2 > \frac{1}{2}\right) + P\left(X_1 > \frac{1}{2} \text{ og } X_2 < \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c)

Vi betragter transformationen

$$(x_1, x_2) \rightarrow (z, y) = \left(\frac{x_{(1)}}{x_{(2)}}, x_{(2)}\right)$$

fra $]0, 1[^2$ ind i $]0, 1[^2$ (idet vi ser på det åbne enhedskvadrat for at undgå eventuelle singulariteter på randen). Man ser, at ethvert punkt $(z, y) \in]0, 1[^2$ er billede af præcis to punkter ved denne transformation, nemlig (zy, y) og (y, zy) . Punkter (x_1, x_2) på diagonalen $x_1 = x_2$ afbildes på randen ($z = 1$), men det er ligegyldigt da diagonalen udgør

en mængde med sandsynlighed 0. Vi kan således bruge den sædvanlige flerdimensionale transformationssætning, idet tætheden for (Z, Y) skal udregnes som sum af to bidrag efter den sædvanlige formel. Vi får, for $x_1 < x_2$, hvor $(z, y) = \left(\frac{x_1}{x_2}, x_2\right)$, funktionaldeterminanten

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ -\frac{x_1}{x_2^2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_{(2)}} = \frac{1}{y}.$$

Ligeledes fås i området $x_1 > x_2$, hvor $(z, y) = \left(\frac{x_2}{x_1}, x_1\right)$, funktionaldeterminanten

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1^2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_{(2)}} = \frac{1}{y}.$$

Tætheden for (z, y) bliver derfor

$$q(z, y) = 2 \times \frac{1}{1/y} = 2y = (2y) \times 1.$$

Heraf følger (pr. definition af uafhængighed i det kontinuerte tilfælde) at $Z = \frac{X_{(1)}}{X_{(2)}}$ og $Y = X_{(2)}$ er stokastisk uafhængige, Y naturligvis med den tæthed vi udledte i spørgsmål (a), medens Z (med tætheden 1) er ligefordelt på enhedsintervallet.