

Reeksamen august 2005, Opgave 1

(a)

Sandsynligheden for at den første kugle ikke er rød er naturligvis $\frac{20}{30}$. Sandsynligheden for at den næste kugle ikke er rød, givet at den første ikke var det, er $\frac{19}{29}$. Osv. osv., så vi får ved hjælp af kædereolen (sætning 2.3.1 i Ssr.) at

$$P(\text{ingen røde kugler}) = \frac{20}{30} \times \frac{19}{29} \times \frac{18}{28} \times \frac{17}{27} = 0.1768.$$

Man kan også direkte benytte at antal røde kugler i stikprøven jo er hypergeometrisk fordelt med parametre $R = 10$, $H = 20$ (idet vi i dette tilfælde ikke behøver at skelne mellem hvid og blå), $n = 4$. Vi får så

$$P(r = 0) = \binom{4}{0} \frac{10^{(0)} 20^{(4)}}{30^{(4)}} = 1 \times \frac{1 \times (20 \times 19 \times 18 \times 17)}{(30 \times 29 \times 28 \times 27)} = 0.1768.$$

(b)

Det forventede antal røde kugler i stikprøven er

$$4 \times \frac{10}{30} = 4/3 = 1.3333.$$

Det er intuitivt indlysende, og følger også ved indsætning i formlen for den hypergeometriske fordelings middelværdi. Variansen finder man ved at indsætte i formlen (Ssr. side 69):

$$\text{var}(r) = n \frac{R}{N} \left(1 - \frac{R}{N}\right) \frac{N-n}{N-1} = 4 \times \frac{10}{30} \times \frac{20}{30} \times \frac{26}{29} = 0.7969.$$

(c)

Når det er givet, at der ingen røde er i stikprøven, kan situationen naturligvis opfattes sådan at vi udtager 4 kugler uden tilbagelægning blandt de 20 blå og hvide. Den efterspurgte sandsynlighed er således en punkt-sandsynlighed i den hypergeometriske fordeling med $R = H = 10$ og $n = 4$:

$$\binom{4}{2} \frac{10^{(2)} 10^{(2)}}{20^{(4)}} = 6 \times \frac{(10 \times 9) \times (10 \times 9)}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = 0.4180.$$