Reeksamen august 2005, Opgave 3

(a)

Vi får

$$\hat{p}_1 = \frac{14752}{20316} = 0.7261$$
$$\hat{p}_2 = \frac{15974}{16505} = 0.9678$$
$$\hat{p}_3 = \frac{13428}{13801} = 0.9730$$
$$\hat{p}_4 = \frac{2111}{2250} = 0.9382$$

med sikkerhedsgrænser givet ved

$$p_1 = 0.7261 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.7261 \times (1 - 0.7261)}{20316}}$$
$$= 0.7261 \pm 1.96 \times 0.0031 = 0.7261 \pm 0.0061$$
$$p_1 = 0.9678 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.9678 \times (1 - 0.9678)}{16505}}$$
$$= 0.9678 \pm 1.96 \times 0.0014 = 0.9678 \pm 0.0027$$
$$p_1 = 0.9730 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.9730 \times (1 - 0.9730)}{13801}}$$
$$= 0.9730 \pm 1.96 \times 0.0014 = 0.9730 \pm 0.0027$$
$$p_1 = 0.9382 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.9382 \times (1 - 0.9382)}{2250}}$$
$$= 0.9382 \pm 1.96 \times 0.0051 = 0.9382 \pm 0.0099$$

Selve sikkerhedsintervallerne bliver så

p_1: [0.7200,0.7322]

p_2: [0.9651,0.9705]

p_3: [0.9703,0.9757]

p_4: [0.9283,0.9482]

(b)

Kvotienttestet for hypotesen $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ er ækvivalent med det sædvanlige kvotienttest for uafhængighed i 4×2–tabellen. Vi får

$$-2\log q = 6812.18$$

Denne teststørrelse skal vurderes i en χ^2–fordeling med $4 - 1 = 3$ frihedsgrader, hvor den er meget større end de største fraktiler man kan slå op i en tabel (f.eks. $\chi^2_3(99.99) = 21.108$). Så der er helt klart forskel på beståelsesprocenterne for de fire eksamensformer.

(c)

Vi kan teste hypotesen $p_2 = p_3$ simpelthen ved at teste for uafhængighed i den 2×2 tabel vi får ved at fjerne første og sidste række i den oprindelige tabel. Her får vi

$$-2 \log q = 6.9181\,.$$

Denne størrelse skal vurderes i en χ^2–fordeling med 1 frihedsgrad, hvor den ligger mellem 99%–fraktilen (6.635) og 99.5%–fraktilen (7.879). Hypotesen må altså forkastes, men konklusionen er langt fra så overbevisende som i det første test.

Her kan man også bruge teststørrelsen

$$u = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_3}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{16505} + \frac{1}{13801}\right)}} = -2.6221$$

hvor

$$\hat{p} = \frac{15974 + 13428}{16505 + 13801} = 0.9702$$

er estimatet for den fælles værdi af p_2 og p_3 under hypotesen. Denne størrelse skal vurderes tosidet i en normeret normalfordeling, eller man kan i stedet bruge den til udregning af Pearsons teststørrelse

$$u^2 = 6.8752$$

der ligesom $-2 \log q$ skal vurderes i en χ^2–fordeling med 1 frihedsgrad. Konklusionen bliver åbenbart den samme.