

Eksamen juni 2006, Opgave 1

(a)

Eftersom S er binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter 0.5 fås

$$P(S = 3) = \binom{10}{3} 0.5^3 0.5^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times 0.5^{10} = \frac{120}{1024} = 0.1172.$$

(b)

Ifølge formlerne for middelværdi og varians i binomialfordelingen er

$$ES = np = 10 \times 0.5 = 5$$

medens standardafvigelsen bliver

$$\sqrt{\text{var}(S)} = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{2.5} = 1.5811.$$

Middelværdien af 2^S kan udregnes ved hjælp af binomialformlen:

$$\begin{aligned} E(2^S) &= \sum_{s=0}^{10} \binom{10}{s} 0.5^s \times 0.5^{10-s} \times 2^s \\ &= \sum_{s=0}^{10} \binom{10}{s} 1^s 0.5^{10-s} = (1 + 0.5)^{10} = 57.665. \end{aligned}$$

(c)

Intuitivt er det klart, at når de to første kast har givet plat, så er fordelingen af det samlede antal kroner (som jo er antallet af kroner i de resterende 8 kast) en binomialfordeling med antalsparameter 8 og sandsynlighedsparameter 0.5. Dette svar er sådan set OK. En mere formel begrundelse er følgende:

Da (X_1, X_2) er stokastisk uafhængig af $(X_3, \dots, X_{10})$ er den betingede fordeling af $(X_3, \dots, X_{10})$, givet $X_1 = X_2 = 0$, lig med den ubetingede fordeling af $(X_3, \dots, X_{10})$. Men så er den betingede fordeling af S lig med den ubetingede fordeling af

$$0 + 0 + X_3 + \dots + X_{10}$$

som jo er binomialfordelingen med antalsparameter 8 og sandsynlighedsparameter 0.5.