Eksamen juni 2006, Opgave 2

(a)

Da middelværdien i den normerede eksponentialfordeling er 1 får vi

$$\mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 = 1 + 2 = 3\,.$$

Tilsvarende fås, på grund af uafhængigheden,

$$\mathrm{var}(X_1 + X_2) = \mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}X_2 = 1 + 2^2 = 5\,,$$

hvor vi har benyttet formlen $\mathrm{var}(\beta X) = \beta^2 \mathrm{var}(X)$ for variansen efter transformation med skalaparameter, samt at variansen i den normerede eksponentialfordeling er 1.

(b)

Vi skal åbenbart beregne et foldningsintegral. Ud fra de to tætheder

$$p_1(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1} \text{ for } x_1 > 0 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

og

$$p_2(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x_2/2} \text{ for } x_2 > 0 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

for X_1 og X_2 skal vi beregne tætheden $q(s)$ for S ved hjælp af formlen

$$q(s) = \int p_1(s-x) p_2(x)\, dx\,.$$

For $s \leq 0$ får vi naturligvis $q(s) = 0$, medens vi for $s > 0$ får

$$q(s) = \int p_1(s-x)p_2(x)\,dx = \int_0^s e^{-(s-x)} \frac{1}{2} e^{-x/2}\,dx = \frac{1}{2} e^{-s} \int_0^s e^{x/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{-s} \left[2e^{x/2} \right]_0^s = \frac{1}{2} e^{-s} (2e^{s/2} - 2) = e^{-s/2} - e^{-s}\,.$$

(c)

Da fordelingsfunktionen for en eksponentialfordelt variabel X med skalaparameter β er

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X}{\beta} \leq \frac{x}{\beta} \right) = 1 - e^{-x/\beta}$$

får vi

$$P(Z > z) = P(X_1 \wedge X_2 > z) = P(X_1 > z \text{ og } X_2 > z)$$
$$= P(X_1 > z) P(X_2 > z) = e^{-z} e^{-z/2} = e^{-\frac{3}{2}z} = e^{-z/\frac{2}{3}}$$

dvs.

$$P(Z \leq z) = 1 - e^{-z/\frac{2}{3}}$$

hvoraf påstanden umiddelbart følger.