Reeksamen juli 2006, Opgave 2

(a)

Tætheden for X er givet ved

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ for } x \in [2,4] \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Sandsynligheden for at X havner i intervallet $[3, 3.5]$ er derfor

$$\int_3^{3.5} p(x)\,dx = \int_3^{3.5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}\,.$$

Her vil det naturligvis også være i orden hvis man blot bemærker, at sandsynligheden for et interval i en ligefordeling er proportional med intervallængden, og da længden af intervallet $[3, 3.5]$ netop er en fjerdedel af den samlede intervallængde 2, må sandsynligheden være $1/4$.

(b)

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = 3\,.$$

Denne udregning kan udelades, det er tilstrækkeligt at bemærke at middelværdien i en ligefordeling på et interval er intervallets midtpunkt.

For at finde variansen beregner vi først

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{28}{3}\,.$$

Vi får så

$$\mathrm{var}(X) = \frac{28}{3} - 3^2 = \frac{1}{3}\,.$$

Alternativt kan man udregne middelværdi og varians ved at benytte, at X kan skrives på formen $X = 2 + 2X_0$, hvor X_0 er ligefordelt på enhedsintervallet. Fra noterne er det kendt at X_0 har middelværdi $\frac{1}{2}$ og varians $\frac{1}{12}$.

(c)

Transformationen $y = t(x) = x^2 - 4$ ses at være voksende og afbilde intervallet [2,4] bijektivt på intervallet [0,12]. Den inverse transformation er givet ved $x = \sqrt{y+4}$. Vi har så for $y \in [0, 12]$, idet tætheden for Y betegnes q,

$$\frac{1}{2}\,dx = q(y)\,dy$$

eller

$$\frac{1}{2} = \frac{dy}{dx}\,q(y) = 2x\,q(y) = 2\sqrt{y+4}\;\,q(y)\,,$$

hvoraf

$$q(y) = \frac{1}{4\sqrt{y+4}} \,.$$

Dette er naturligvis kun for $y \in [0, 12]$, udenfor dette interval er $q(y) = 0$.