Eksamen maj 2007, Opgave 2

(a) Fra forelæsningsnoterne ved vi, at middelværdien i den rektangulære fordeling på enhedsintervallet er $\frac{1}{2}$ medens variansen er $\frac{1}{12}$. Af almindelige regneregler for middelværdier og varianser følger så at

$$\mathrm{E}\,(2X_1 - X_2) = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}\,,$$

$$\mathrm{var}\,(2X_1 - X_2) = 2^2\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = \mathbf{0.4167}\,.$$

(b)

Området

$$\{|X_1 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{3} \text{ og } |X_2 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{3}\}$$

er kvadratet med centrum i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og akseparallelle sider af længde $\frac{2}{3}$. Den efterspurgte sandsynlighed er dette områdes areal, altså $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} =$ **0.4444**.

(c)

Den afledte stokastiske variabel $|X_1 - \frac{1}{2}|$ antager åbenbart sine værdier i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$. Intuitivt er det rimeligt at gætte på, at dens fordeling er ligefordelingen på dette interval. Dette følger ved et standard transformationsargument (afbildningen der fører $x \in [0,1]$ over i $y = |x - \frac{1}{2}| \in [0, \frac{1}{2}]$ har differentialkvotient ± 1, og hver y–værdi svarer til to x–værdier). Men det er måske lettere at benytte følgende direkte argument: For et vilkårligt interval $[a,b] \subseteq [0, \frac{1}{2}]$ har vi

$$P\left(|X_1 - \frac{1}{2}| \in [a,b]\right) = P\left(X_1 - \frac{1}{2} \in [a,b] \text{ eller } -X_1 + \frac{1}{2} \in [a,b]\right)$$

$$= P\left(X_1 \in [a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}]\right) + P\left(X_1 \in [\frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} - a]\right) = 2(b-a)\,.$$