Opgave 3, reeksamen august 2007.

(a)

Idet de tre sandsynlighedsparametre betegnes p_1, p_2 og p_3 fås estimaterne

$$\hat{p}_1 = \frac{49}{70} = \mathbf{0.7000},\ \hat{p}_1 = \frac{32}{62} = \mathbf{0.5161} \text{ og } \hat{p}_1 = \frac{27}{53} = \mathbf{0.5094}\,.$$

Med 95% sikkerhed har vi således:

$$p_1 = 0.7000 \pm 1.96\sqrt{\frac{49 \times 21}{70^3}} = 0.7000 \pm 1.96 \times 0.05477 = 0.7000 \pm 0.1074$$

svarende til sikkerhedsintervallet [**0.5926,0.8074**];

$$p_2 = 0.5161 \pm 1.96\sqrt{\frac{32 \times 30}{62^3}} = 0.5161 \pm 1.96 \times 0.06347 = 0.5161 \pm 0.1244$$

svarende til sikkerhedsintervallet [**0.3917,0.6405**];

$$p_3 = 0.5094 \pm 1.96\sqrt{\frac{27 \times 26}{53^3}} = 0.5094 \pm 1.96 \times 0.06867 = 0.5094 \pm 0.1346$$

svarende til sikkerhedsintervallet [**0.3748,0.6440**].

(b)

Kvotienttestet for hypotesen $p_1 = p_2 = p_3$ (også kaldet testet for uafhængighed i 3×2–tabellen) giver

$$2(49 \log 49 + \cdots + 26 \log 26 - 70 \log 70 - \cdots - 77 \log 77 + 185 \log 185)$$

$= 6.3838$, som er lidt større end 95%–fraktilen 5.991 i χ^2–fordelingen med $2 = (3–1)(2–1)$ frihedsgrader. Formelt bliver hypotesen således forkastet på 5%–niveauet, men det er ikke nogen særligt sikker konklusion. Den tilsvarende Pearson teststørrelse bliver 6.2647 (samme konklusion).

(c)

Kvotienttestet for uafhængighed i 2×2–tabellen svarende til de to ældste grupper giver

$$-2 \log q = 0.005126$$

som abslolut ikke er ekstremt stor (den er snarere ekstremt lille) i χ^2–fordelingen med $1 = (2–1)(2–1)$ frihedsgrader. Vi godkender altså hypotesen om at sandsynligheden for at være ryger er den samme i disse to grupper. Pearsons test (Stat. kap. 3, side 17) giver

$$\left(\frac{\frac{32}{62} - \frac{27}{53}}{\sqrt{\left(\frac{1}{62} + \frac{1}{53}\right)\frac{59}{115}\frac{56}{115}}}\right)^2 = 0.005127$$

med samme konklusion.