

Opgave 2, eksamen juni 2008.

(a)

Ifølge velkendte regneregler er

$$E(X_1 + 3X_2) = E(X_1) + 3E(X_2) = 4E(X_1) = \mathbf{4}.$$

$$\text{var}(X_1 + 3X_2) = \text{var}(X_1) + 9\text{var}(X_2) = 10\text{var}(X_1) = \mathbf{10},$$

idet både middelværdi og varians i den normerede eksponentialfordeling er 1.

(b)

$$\begin{aligned} & P((X_1, X_2) \in ([0, 1[\times [0, 1[) \cup (]1, +\infty[\times]1, +\infty[)) \\ &= P((X_1, X_2) \in [0, 1[\times [0, 1[) + P((X_1, X_2) \in]1, +\infty[\times]1, +\infty[) \\ &= P(X_1 \in [0, 1[)^2 + P(X_1 \in]1, +\infty[)^2 \\ &= (1 - e^{-1})^2 + (e^{-1})^2 = (1 - 0.3679)^2 + 0.3679^2 \\ &= \mathbf{0.5349}. \end{aligned}$$

I den første omskrivning har vi brugt additivitetsreglen, idet $[0, 1[\times [0, 1[$ og $]1, +\infty[\times]1, +\infty[$ er disjunkte. I den anden har vi brugt at X_1 og X_2 er stokastisk uafhængige og identisk fordelte. I den tredje bruges at den normerede eksponentialfordeling har fordelingsfunktionen $1 - e^{-x}$ på $[0, +\infty[$.

(c)

Middelværdien af $\exp(aX_1)$ er givet som integralet

$$\int_0^{+\infty} e^{ax} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1-a)x} dx.$$

For $a = 1$ er integranden konstant lig med 1, og for $a > 1$ er den en voksende funktion, så det er klart at integralet ikke er defineret for $a \geq 0$. For $a \in [0, 1[$ er integranden derimod eksponentielt aftagende, og i så fald får vi, ved at regne videre på ovenstående udtryk, idet vi substituerer x med $z = (1 - a)x$, $dx = dz/(1 - a)$,

$$\begin{aligned} E(\exp(aX_1)) &= \int_0^{+\infty} e^{-(1-a)x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-z} \frac{dz}{1-a} \\ &= \frac{1}{1-a} \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$