Reeksamen august 2008, Opgave 1

(a)

Udfaldsrummet $\{1,\ldots,6\}^{10}$ består af 6^{10} udfald, som er lige sandsynlige. Hændelsen "$X_i \le 5$ for alle i", eller $\{1,\ldots,5\}^{10}$, består af 5^{10} udfald. Altså er den søgte sandsynlighed

$$\frac{5^{10}}{6^{10}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \mathbf{0.1615}\,.$$

(b)

$S = 10$ betyder at alle terningerne viser 1, hvilket kun sker for ét udfald. $S = 11$ betyder at netop en af terningerne viser 2, de andre viser 1; det sker for 10 forskellige udfald, nemlig

(2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)
(1,2,1,1,1,1,1,1,1,1)
(1,1,2,1,1,1,1,1,1,1)
...
(1,1,1,1,1,1,1,1,1,2).

Alt i alt er der altså 11 forskellige udfald som fører til $S \le 11$, så

$$P(S \le 11) = \frac{11}{6^{10}} = \mathbf{0.0000001819}\,.$$

Af ovenstående overvejelser følger også at

$$P(S = 11 \mid S \le 11) = \frac{P(S = 11 \text{ og } S \le 11)}{P(S \le 11)} = \frac{\frac{10}{6^{10}}}{\frac{11}{6^{10}}} = \frac{10}{11} = \mathbf{0.9091}\,.$$

(c)

Vi får

$\mathrm{E}X_i = 3.5$ (velkendt),

$\mathrm{var}(X_i) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)/6 - 3.5^2$
$= (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 - 3.5^2 = 2.9167.$

Heraf følger ved brug af velkendte regneregler for middelværdier og varianser at

$\mathrm{E}S = 10 \times 3.5 = 35$, og

$\mathrm{var}(S) = 10 \times 2.9167 = 29.167$, $\sqrt{\mathrm{var}(S)} = \sqrt{29.167} = 5.401.$

Da S, som sum af en hel del uafhængige, identisk fordelte variable, er approksimativt normalfordelt, får vi

$$P(S \le 30) = P\left(\frac{S - 35}{5.401} \le \frac{30 - 35}{5.401}\right)$$

$$= P\left(\frac{S-35}{5.401} \leq -0.9258\right) \approx \Phi(-0.9258) = \mathbf{0.1773}\,.$$

Det er det resultat man får ved brug af en lommeregner, der har Φ indbygget. Hvis man slår op i tabellen i sandsynlighedsregningsnoterne kan man bruge interpolation til at få nogenlunde det samme resultat. Men det er godt nok (100%) hvis man angiver, at facit ligger mellem 0.17 og 0.18. Og hvis man som facit angiver $\Phi(-0.9258)$ er det næsten godt nok (ca. 80%).

Det tæller selvfølgelig positivt, hvis man i ovenstående udregninger benytter kontinuitetskorrektion, dvs. erstatter 30 med 30.5 på grund af det ikke–skarpe ulighedstegn. Men man kan godt få 100% uden at gøre det, hvis alt andet er i orden.