

Eksamen maj 2009, Opgave 1

(a)

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}.$$

$$EX = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 2 + \frac{3}{6} \times 3 = \frac{1+4+9}{6} = \frac{14}{6} = \mathbf{2.3333}.$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 4 + \frac{3}{6} \times 9 = \frac{1+8+27}{6} = \frac{36}{6} = 6,$$

$$\text{var}(x) = E(X^2) - (EX)^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \mathbf{0.5556}.$$

(b)

$X_1 - X_2$ følger åbenbart en diskret fordeling på mængden $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sandsynlighedsfunktionen bliver

$$q(-2) = P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 3) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \mathbf{0.0833},$$

$$q(-1) = P(X_1 = 2 \text{ og } X_2 = 3) + P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 2) \\ = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6+2}{36} = \frac{8}{36} = \mathbf{0.2222},$$

$$q(0) = P(X_1 = 3 \text{ og } X_2 = 3) + P(X_1 = 2 \text{ og } X_2 = 2) \\ + P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 1) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{9+4+1}{36} = \frac{14}{36} = \mathbf{0.3889}.$$

Af symmetri Grunde fås herefter

$$q(1) = q(-1) = \mathbf{0.2222}, \text{ og}$$

$$q(2) = q(-2) = \mathbf{0.0833}.$$

$$P(X_1 = 3 | X_1 - X_2 = 0) = \frac{P(X_1 = 3 \text{ og } X_1 - X_2 = 0)}{P(X_1 - X_2 = 0)} \\ = \frac{P(X_1 = 3 \text{ og } X_2 = 3)}{0.3889} = \frac{(3/6)^2}{0.3889} = \mathbf{0.6428}.$$

(c)

Ifølge den centrale grænseværdisætning er $S = X_1 + \dots + X_{100}$ approksimativt normalt fordelt med middelværdi

$$ES = 100 \times EX = 233.33$$

og varians

$$\text{var}(S) = 100 \times \text{var}(X) = 55.56.$$

Det betyder, at S har approksimativt samme fordeling som

$$S' = 233.33 + \sqrt{55.56} \times U = 233.33 + 7.454 \times U,$$

hvor U er normeret normalfordelt. De to efterspurgte fraktiler for fordelingen af S' er åbenbart $233.33 \pm 7.454 \times 1.96 = 233.33 \pm 14.61$, så vi får fraktilerne (eksakt for S' , approksimativt for S)

$$2.5\% \text{ fraktil: } 233.33 - 14.61 = \mathbf{218.72},$$

$$97.5\% \text{ fraktil: } 233.33 + 14.61 = \mathbf{247.94}.$$