Eksamen maj 2009, Opgave 2

(a)

Både middelværdien og variansen i en Γ–fordeling er lig med formparameteren λ (=2 i dette tilfælde), så vi får ifølge velkendte regneregler

$\mathrm{E}Y = 3 + 5 \times 2 = \mathbf{13}$,

$\mathrm{var}(Y) = 5^2 \times 2 = \mathbf{50}$.

(b)

Transformationen, som fører $x > 0$ over i $z = \exp(-x)$ er aftagende og kontinuert differentiabel. Når x gennemløber den positive halvakse vil z gennemløbe enhedsintervallet. Vi får således, hvis vi lader p betegne tætheden for X og q tætheden for $Z = \exp(X)$,

$$q(z) = -\frac{dx}{dz} p(x) = \frac{1}{z} x e^{-x} = \frac{1}{z}(-\log z) z = -\log z \;\text{ for } z \in]0, 1[\,.$$

(c)

Her er det nemmest at henvise til Γ–fordelingens foldningsegenskab. Af denne følger jo at $S = X_1 + X_2$ er Γ–fordelt med formparameter 4, dvs. med tæthed

$$r(s) = \frac{1}{\Gamma(4)} s^{4-1} e^{-s} = \frac{1}{6} s^3 e^{-s} \;\text{ for } s > 0\,.$$

Hvis man ikke lige kommer i tanke om Γ–fordelingens foldningsegenskab må man benytte selve foldningsintegralet, som giver

$$r(s) = \int_0^s p(s-x) p(x)\, dx = \int_0^s (s-x) e^{-(s-x)} x e^{-x}\, dx$$

$$= e^{-s} \int_0^s (s-x) x\, dx = e^{-s} \frac{s^3}{6}\,,$$

hvor det sidste lighedstegn følger ved en elementær udregning af det sidste integral.