

Eksamen maj 2009, Opgave 3

(a)

For de sorthårede fås

$$\hat{p}_1 = 41/52 = 0.7885.$$

Den estimerede standardafvigelse for $\hat{p}_1$ bliver

$\sqrt{\frac{1}{52}0.7885 \times (1 - 0.7885)} = 0.0556$, og da $1.96 \times 0.0556 = 0.111$ fås det approksimative 95% sikkerhedsinterval

$$\hat{p}_1 = \mathbf{0.789} \pm 0.111 \text{ svarende til intervallet } [\mathbf{0.678}, \mathbf{0.900}].$$

Tilsvarende fås for de tre andre hårfarver

$$\hat{p}_2 = \mathbf{0.696} \pm 0.072 \text{ svarende til intervallet } [\mathbf{0.624}, \mathbf{0.768}].$$

$$\hat{p}_3 = \mathbf{0.622} \pm 0.156 \text{ svarende til intervallet } [\mathbf{0.466}, \mathbf{0.778}].$$

$$\hat{p}_4 = \mathbf{0.111} \pm 0.065 \text{ svarende til intervallet } [\mathbf{0.046}, \mathbf{0.176}].$$

(b)

For at sammenligne sandsynlighederne for de tre første grupper skal vi blot foretage testet for uafhængighed i den tabel, der udgøres af de tre første rækker. Vi får

$$\begin{aligned} -2 \log q &= 41 \log 41 + \cdots + 14 \log 14 \\ &\quad - 174 \log 174 - \cdots - 37 \log 37 \\ &\quad + 247 \log 247 = 3.0961. \end{aligned}$$

(Tilsvarende Pearson størrelse: 3.0336). Denne størrelse skal vurderes i en χ^2 -fordeling med 2 frihedsgrader, hvor den er klart insignifikant da 95%-fraktilen er 5.991. Vi får altså godkendt, at sandsynligheden for brunøjethed er uafhængig af hårfarve, når man ser bort fra de blonde.

(c)

Vi betragter tabellen

	Mænd	Kvinder	I alt
1. Sort hår	56	52	108
2. Brunt hår	128	158	286
3. Rødt hår	34	37	71
4. Blondt hår	46	81	127
I alt	264	328	592

Hypotesen om at fordelingen af hårfarven er den samme for de to køn svarer til uafhængighed i denne tabel. Kvotientteststørrelsen bliver

$$\begin{aligned}
-2 \log q &= 56 \log 56 + \cdots + 81 \log 81 \\
&- 264 \log 264 - \cdots - 127 \log 127 \\
&+ 592 \log 592 = 6.2668 .
\end{aligned}$$

(Tilsvarende Pearson størrelse: 6.2212). Denne størrelse skal vurderes i en χ^2 -fordeling med 3 frihedsgrader, hvor den er insignifikant, da 95%-fraktilen er 7.815. Vi får således godkendt, at fordelingen af hårfarven er den samme for mænd og kvinder.