Reeksamen august 2009, Opgave 1

(a)

$$P(\{X \leq 2\} \cup \{Y \leq 2\}) = P((X,Y) \neq (3,3)) = 1 - 0.1 = \mathbf{0.9}\,.$$

(b)

Sandsynlighedsfunktionen for X ses at være

$p_x(1) = 0.1 + 0.3 + 0.0 = 0.4$
$p_x(2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$
$p_x(3) = 0.0 + 0.2 + 0.1 = 0.3$

Sandsynlighedsfunktionen for Y er tilsvarende

$p_y(1) = 0.1 + 0.1 + 0.0 = 0.2$
$p_y(2) = 0.3 + 0.1 + 0.2 = 0.6$
$p_y(3) = 0.0 + 0.1 + 0.1 = 0.2$

X og Y er *ikke* uafhængige, da vi for eksempel har

$$p_x(1)p_y(3) = 0.4 \times 0.2 \neq 0.0 = p(1,3)\,.$$

(c)

Punktsandsynlighederne i den betingede fordeling af Y, givet $X = 2$, får vi ved at tage de tre punktsandsynligheder i anden række og normere. Da de tre sandsynligheder er ens, får vi ligefordelingen, altså

$$p(x|Y=2) = \frac{1}{3} \text{ for } x = 1,2,3\,.$$

Vi får så, når X antages at følge denne (betingede) fordeling

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 = \mathbf{2}$$

og

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{3} \times (1-2)^2 + \frac{1}{3} \times (2-2)^2 + \frac{1}{3} \times (3-2)^2 = \frac{2}{3} = \mathbf{0.6667}\,.$$