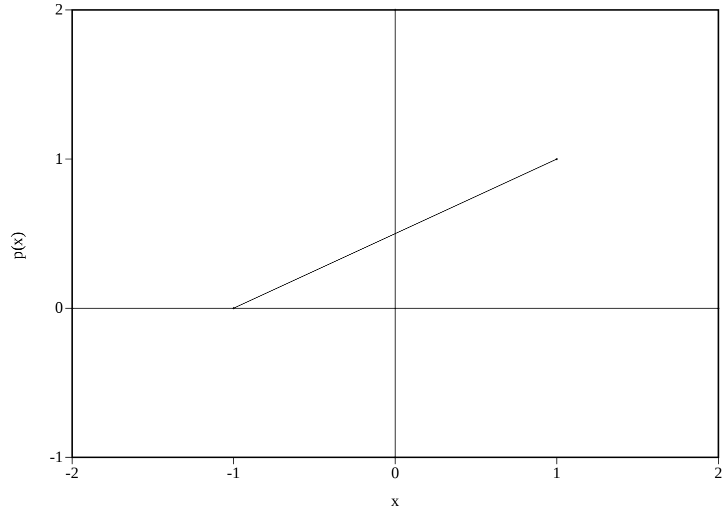
Reeksamen august 2009, Opgave 2

(a)



Man ser umiddelbart at funktionen $p(x)$ er ≥ 0 og har integral 1 (= areal af trekanten, 1/2 højde gange grundlinie). Vi får

$$\mathrm{E}X = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2} x\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 + x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 0\right) = \frac{1}{3} = \mathbf{0.3333}$$

Og da

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{2} x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

fås

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} = \mathbf{0.2222}\,.$$

(b)

For x imellem –1 og 1 har vi

$$\int_{-1}^{x} p(z)\, dz = \int_{-1}^{x} \frac{z+1}{2}\, dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} (z+1)\, dz = \frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2} + z\right]_{-1}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) = \frac{(x+1)^2}{4}\,.$$

Dette er altså det ubestemte integral af $p(x)$ for $x \in]-1, 1[$. Vi får således fordelingsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{4} & \text{for } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leq x \end{cases}$$

Vi ser, at den antager værdierne 0.25 og 0.50 for henholdsvis $x = \mathbf{0.0000}$ og $x = \sqrt{2} - 1 = \mathbf{0.4142}$.

(c)

De nye variable Y_i er uafhængige 0–1 variable med $P(Y_i = 1) = 0.25$. S bliver derfor binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{4}$. Specielt er

$$\mathrm{E}S = 10 \times 0.25 = \mathbf{2.5}$$

og

$$\mathrm{var}(S) = 10 \times 0.25 \times (1 - 0.25) = \mathbf{1.8750}\,.$$