Eksamen maj 2010, Opgave 1

(a)

Fordelingen af summen $X_1 + X_2$ er vist i noterne, og fordelingen af differensen fås af denne ved en simpel translation (idet $X_1 - X_2$ har samme fordeling som $X_1 - (7 - X_2) = X_1 + X_2 - 7$.) Men vi kan også direkte beregne sandsynlighedsfunktionen ved hjælp af tabellen

```
     X2 = 1  2  3  4  5  6
-------------------------
X1=1 |   0 -1 -2 -3 -4 -5
   2 |   1  0 -1 -2 -3 -4
   3 |   2  1  0 -1 -2 -3
   4 |   3  2  1  0 -1 -2
   5 |   4  3  2  1  0 -1
   6 |   5  4  3  2  1  0
```

som viser Y som funktion af X_1 og X_2. Da alle 36 udfald har sandsynlighed 1/36 fås ved simpel optælling, at Y har sandsynlighedsfunktionen

$$q(y) = \begin{cases} \frac{6}{36} \text{ for } y = 0 \\ \frac{5}{36} \text{ for } y = \pm 1 \\ \frac{4}{36} \text{ for } y = \pm 2 \\ \frac{3}{36} \text{ for } y = \pm 3 \\ \frac{2}{36} \text{ for } y = \pm 4 \\ \frac{1}{36} \text{ for } y = \pm 5 \end{cases}$$

(og, naturligvis, $q(y) = 0$ for alle andre værdier af y).
Af denne fordelings symmetri følger at

$$\mathrm{E}Y = 0$$

(følger også af at $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X_1 - \mathrm{E}X_2 = 0$). Af

$$\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(X_2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} - 3.5^2 = 2.9167$$

følger at

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) = 5.8333\,.$$

(b) Den komplementære hændelse til “både lige og ulige antal” er foreningsmængden af de to hændelser “alle lige” og “alle ulige”, som åbenbart er disjunkte og har samme sandsynlighed

$$P(\text{alle lige}) = P(\text{alle ulige}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Så vi får

$$P(\text{både lige og ulige}) = 1 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{3}{4}\,.$$

(c)

Hændelsen $S = 5$ indebærer, at det største af de tre antal X_1, X_2 og X_3 må være enten 3 eller 2. Hvis det største antal er 3 må de to andre være 1. Hvis det største antal er 2 må de to andre være 1 og 2. Heraf ses, at der er præcis 6 af de 216 udfald som fører til summen 5:

$$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2) \text{ og } (2, 2, 1)\,.$$

Af disse er der ét som har $X_1 = 3$. Heraf følger (da den betingede fordeling jo er en ligefordeling på den hændelse der betinges med) at

$$P(X_1 = 3 | S = 5) = \frac{1}{6}\,.$$