Eksamen maj 2010, Opgave 2

(a)

Da den rektangulære fordeling på enhedsintervallet har middelværdi $\frac{1}{2}$ og varians $\frac{1}{12}$ får vi

$$\mathrm{E}S = 10 \times \mathrm{E}X_1 = 5\,, \qquad \mathrm{var}(S) = 10 \times \mathrm{var}(X_1) = \frac{10}{12} = 0.8333$$

(b)

Hvis S er approksimativt normalfordelt med middelværdi 5 og varians $\frac{10}{12}$ er

$$U = \frac{S-5}{\sqrt{10/12}}$$

approksimativt normeret normalfordelt, så vi får

$$P(S \geq 6) = P\left(\frac{S-5}{\sqrt{10/12}} \geq \frac{6-5}{\sqrt{10/12}}\right)$$

$$= P(U \geq 1.09545) \approx \Phi(-1.09545) = 0.1367$$

(ved tabelopslag og interpolation evt. afrundet til 0.137).

(c)

Det forventede antal blandt de 10000 simulerede S–værdier som er ≥ 6 skulle ifølge ovenstående være 1367. Det observerede antal 1387 ligger meget tæt på dette, hvilket bekræfter at approksimationen ved hjælp af den centrale grænseværdisætning kan bruges. Et formelt test for, om den passer i dette tilfælde, får vi ved at fortolke 1387 som udfald af en binomialfordelt observation med antalsparameter 10000 og sandsynlighedsparameter p, og udføre et test for hypotesen $p = 0.1367$. Vi får

$$u = \frac{1387 - 1367}{\sqrt{10000 \times 0.1367 \times 0.8633}} = 0.5822\,.$$

Denne størrelse skal vurderes tosidet i en normeret normalfordeling, hvor den helt klart er insignifikant.