

Reeksamen august 2010, Opgave 1

(a)

De mulige værdier af Y er naturligvis -1 , 0 og 1 . Vi får

$$P(Y = -1) = P(X_1 = 0 \text{ og } X_2 = -1) = (1 - p)p = p - p^2,$$

$$P(Y = 0) = P(X_1 = 0 \text{ og } X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 1) = (1 - p)^2 + p^2 = 1 + 2p^2 - 2p,$$

$$P(Y = 1) = P(X_1 = 1 \text{ og } X_2 = 0) = p(1 - p) = p - p^2.$$

(b)

Vi sætter $Z_1 = X_1X_2$, $Z_2 = X_3X_4$, $\dots$, $Z_5 = X_9X_{10}$. Så er $Z_1, \dots, Z_5$ uafhængige (fordi de afhænger af hvert sit sæt af X 'er) og identisk fordelte. Åbenbart er Z_i en 0-1 variabel, med $P(Z_i = 1) = p^2$. Det følger herefter umiddelbart (med reference til binomialfordelingens definition) at $S = Z_1 + \dots + Z_5$ er binomialfordelt med antalsparameter 5 og sandsynlighedsparamter p^2 .

(c)

Når man betinger med at $X_1 + \dots + X_{10} = 7$ er der kun den tilfældige variation tilbage, som går ud på at de 7 ettaller og de 3 nuller kan stå i en vilkårlig rækkefølge. Denne rækkefølge er naturligvis helt tilfældig, således at når vi ser på hvor mange ettaller der forekommer blandt de fem første, så svarer det til at tælle de røde kugler i en stikprøve på 5, taget fra en kasse med 10 kugler hvoraf 7 er røde og 3 er hvide. Dvs. den betingede fordeling af $X_1 + \dots + X_5$ (= antal røde kugler i stikprøven) er hypergeometrisk med parametre, som (i forelæsningsnoternes notation) er givet ved $N = 10$, $R = 7$ og $n = 5$ (her kan eventuelt henvises til opgave 3.3.6 i sandsynlighedsregningsnoterne, men det er ikke nødvendigt).

Hermed er den betingede fordeling fuldt specificeret, det er ikke nødvendigt at opskrive sandsynlighedsfunktionen for den hypergeometriske fordeling eller regne dens punktsandsynligheder ud i dette specialtilfælde. Men hvis man alligevel har gjort det kan det være af interesse at kende facit: De mulige værdier af $X_1 + \dots + X_5$ for $X_1 + \dots + X_{10} = 7$ er 2, 3, 4 og 5, og de tilsvarende punktsandsynligheder i den betingede fordeling er

$$P(X_1 + \dots + X_5 = 2 | X_1 + \dots + X_{10} = 7) = \frac{1}{12} = 0.0833,$$

$$P(X_1 + \dots + X_5 = 3 | X_1 + \dots + X_{10} = 7) = \frac{5}{12} = 0.4167,$$

$$P(X_1 + \dots + X_5 = 4 | X_1 + \dots + X_{10} = 7) = \frac{5}{12} = 0.4167,$$

$$P(X_1 + \dots + X_5 = 5 | X_1 + \dots + X_{10} = 7) = \frac{1}{12} = 0.0833.$$