

Reeksamen august 2010, Opgave 2

(a)

$$E(2U_1 - U_2) = 2 \times 0 - 0 = 0,$$

$$\text{var}(2U_1 - U_2) = 4\text{var}(U_1) + \text{var}(U_2) = 4 + 1 = 5.$$

Fordelingen af $2U_1 - U_2$ er således (p.g.a. den normale fordelings foldningsegenskab) normalfordelingen med middelværdi 0 og varians 5.

(b)

$$\begin{aligned} P(4U_1 - 3 \in [0, 1]) &= P(4U_1 \in [3, 4]) = P\left(U_1 \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0.75) = 0.8414 - 0.7733 = 0.0681. \end{aligned}$$

(hvis man bruger tabellen i sandsynlighedsregningsnoterne må man benytte interpolation for at få så nøjagtigt et resultat. Men det er OK hvis man bare angiver $\Phi(1) - \Phi(0.75) = 0.84 - 0.77 = 0.07$, svarende til at man afrunder til nærmeste værdi i tabellen. Det er naturligvis også OK at bruge lommeregneren).

(c)

Da

$$\begin{aligned} \text{cov}(2U_1 - U_2, 2U_1 + U_2) &= E((2U_1 - U_2)(2U_1 + U_2)) \\ &= E(4U_1^2 - U_2^2 + 2U_1U_2 - 2U_2U_1) = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

og

$$\text{var}(2U_1 - U_2) = \text{var}(2U_1 + U_2) = 5,$$

får vi

$$\text{corr}(2U_1 - U_2, 2U_1 + U_2) = \frac{3}{\sqrt{5 \times 5}} = \frac{3}{5} = 0.6000.$$