For fast N, lad K betegne antallet af elementer i mængden

$$\{x|\frac{x}{N} \in [a,b]\} = \{1,2,\ldots,N-1,N\} \cap [Na,Nb]\,.$$

Så er

$$P(X_N \in [a,b]) = \frac{K}{N}\,,$$

og der gælder

$$\{1,2,\ldots,N-1,N\} \cap [Na,Nb] = \{M+1,M+2,\ldots,M+K-1,M+K\}$$

for et eller andet heltal M. Her må der åbenbart gælde

$$(1) \qquad M \leq Na \leq M+1$$

og

$$(2) \qquad M+K \leq Nb \leq M+K+1$$

Multiplikation af (1) med -1 giver (idet vi vender ulighedstegnene, og derefter vender dem igen ved at skrive det hele bagfra)

$$(1^*) \qquad -M-1 \leq -Na \leq -M$$

og ved addition af (1*) og (2) fås herefter

$$K-1 \leq Nb-Na \leq K+1$$

eller

$$\frac{K}{N} - \frac{1}{N} \leq b-a \leq \frac{K}{N} + \frac{1}{N}\,.$$

Heraf følger at

$$\big|P(X_N \in [a,b]) - (b-a)\big| \leq \frac{1}{N}$$

hvoraf det ønskede resultat umiddelbart følger.