Tue Tjur
Marts 2007

Stat. MØK 2. år

Sandsynlighedsregning

Oversigt over begreber og fordelinger

Kapitel 1: Sandsynlighedsfordelinger og stokastiske variable

En **sandsynlighedsfunktion** på en mængde E (**udfaldsrummet**) er en funktion $p : E \to \mathbf{R}$ som opfylder de to betingelser

(p1) $$p(x) \geq 0,$$

(p2) $$\sum_{x \in E} p(x) = 1.$$

En **sandsynlighedsfordeling** på en endelig mængde E er en afbildning P som til hver delmængde (eller **hændelse**) $A \subseteq E$ knytter et tal $P(A)$, så følgende tre betingelser er opfyldt:

(P1) $$P(A) \geq 0 \ \text{ for alle } \ A \subseteq E$$

(P2) $$P(E) = 1$$

(P3) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \text{ for } \ A, B \subseteq E, \ A \cap B = \emptyset$$

Sandsynlighedsfunktioner og sandsynlighedsfordelinger hører sammen i par, og kan konstrueres ud fra hinanden efter formlerne

$$p(x) = P(\{x\}), \qquad P(A) = \sum_{x \in A} p(x)\,.$$

Dette gælder også for **diskrete** fordelinger på vilkårlige (ikke nødvendigvis endelige) udfaldsrum, når definitionen af en sandsynlighedsfordeling suppleres med en ekstra antagelse.

Ligefordelingen P på en endelig mængde E er givet ved $P(A) = |A|/|E|$ og har sandsynlighedsfunktionen $p(x) = 1/|E|$.

Regneregler for sandsynligheder:

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(3) For parvis disjunkte mængder $A_1, \ldots, A_n$ er $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

(4) $P(E \setminus A) = 1 - P(A)$.

En **stokastisk variabel** X på E med fordeling P er en variabel der antager en tilfældig værdi, således at $P(A)$ er sandsynligheden for at denne værdi falder i A. Vi skriver også $P(X \in A) = P(A)$.

Ud fra en stokastisk variabel kan **afledte** stokastiske variable dannes ved **transformation**: Hvis $t : E \to F$ er en afbildning fra udfaldsrummet E ind i et andet udfaldsrum F, så er $Y = t(X)$ en stokastisk variabel på F med fordeling Q givet ved $Q(B) = P(t(X) \in B) = P(X \in t^{-1}(B)) = P(t^{-1}(B))$. Sandsynlighedsfunktionen for Y bliver $q(y) = \sum_{x \in t^{-1}(y)} p(x)$.

Kapitel 2: Betingede fordelinger og uafhængighed

Den **betingede sandsynlighed** for B, **givet** A, er størrelsen

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$P(B|A)$ fortolkes som sandsynligheden for, at hændelsen B vil indtræffe, under antagelse af at A indtræffer.

Lad X være en stokastisk variabel på E med fordeling P. Som funktion af en variabel hændelse $B \subseteq E$ kaldes $P(B|A)$ den **betingede fordeling** af X, **givet** $X \in A$. Mere generelt, hvis $Y = t(X)$ er en afledt stokastisk variabel med udfaldsrum F kaldes $P(t^{-1}(C)|A)$ som funktion af $C \subseteq F$ den **betingede fordeling af Y, givet** $X \in A$.

Kædereglen siger at hvis $A_1, \ldots, A_n$ er hændelser således at $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, så er

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\qquad = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Reglen for **udregning af sandsynligheder ved opdeling i tilfælde** siger at hvis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er parvis disjunkte hændelser med positive sandsynligheder, således at $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$, så kan sandsynligheden for en vilkårlig hændelse $B \subseteq E$ udregnes som

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n).$$

Stokastisk uafhængighed. Hvis (X_1, X_2) er en stokastisk variabel på produktmængden $E_1 \times E_2$ siges X_1 og X_2 at være (stokastisk) uafhængige hvis sandsynlighedsfunktionen $p(x_1, x_2)$ for den **simultane fordeling** (dvs. fordelingen af (X_1, X_2)) kan skrives som produktet

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$$

af sandsynlighedsfunktionerne for de **marginale fordelinger** af X_1 og X_2. Alternativt kan stokastisk uafhængighed beskrives ved reglen

$$P(X_1 \in A_1 \text{ og } X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)$$

eller ved at den betingede fordeling af X_2, givet en hændelse som vedrører X_1, altid er lig med den marginale fordeling af X_2.

Kapitel 3: Fordelinger af antal

Fakultetsfunktionen: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ = "n udråbstegn" = antal måder hvorpå en mængde bestående af n elementer kan ordnes.

Nedadstigende faktoriel: $n^{(k)} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = n!/(n-k)!$ = "n i k rund" = antal ordnede sæt bestående af k elementer fra en mængde med n elementer.

Binomialkoefficient: $\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ="n over k" = antal delmængder med netop k elementer af en mængde med n elementer.

Binomialformlen:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

Polynomialkoefficient:

$$\binom{n}{s_1\ s_2 \dots s_k} = \frac{n!}{s_1!s_2!\dots s_k!}$$

= antallet af inddelinger af $\{1,\dots,n\}$ i k klasser af størrelser $s_1,\dots,s_k$.

Oversigt over diskrete fordelinger.

Binomialfordelingen med antalsparameter $n \in \mathbf{N}$ og sandsynlighedsparameter $p \in]0,1[$ er fordelingen på $\{0,1,\dots,n\}$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Middelværdi np, varians $np(1-p)$.

Den hypergeometriske fordeling med parametre (N,R,n) er fordelingen på $\{0,\dots,n\}$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(r_0) = \frac{\binom{R}{r_0}\binom{N-R}{n-r_0}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{r_0} \frac{R^{(r_0)}(N-R)^{(n-r_0)}}{N^{(n)}}.$$

Middelværdi $n\frac{R}{N}$, varians $n\frac{R}{N}(1-\frac{R}{N})\frac{N-n}{N-1}$.

Polynomialfordelingen eller **multinomialfordelingen** med antalsparameter $n \in \mathbf{N}$, orden k og sandsynlighedsparametre $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (positive med sum 1) er fordelingen på $\{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbf{N}_0^k \mid s_1 + \cdots + s_k = n\}$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(s_1, \ldots, s_k) = \binom{n}{s_1 \ldots s_k} p_1^{s_1} \ldots p_k^{s_k} .$$

Den marginale fordeling af S_j er binomialfordelingen med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p_j, hvoraf følger at $\mathrm{E}S_j = np_j$ og $\mathrm{var}(S_j) = np_j(1-p_j)$. Kovariansen mellem S_i og S_j for $i \neq j$ er $-np_ip_j$.

Den geometriske fordeling med parameter p er fordelingen på $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2 \ldots\}$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(t) = (1-p)^t p .$$

Middelværdi $\frac{1-p}{p}$, varians $\frac{1-p}{p^2}$.

Poissonfordelingen med parameter λ er fordelingen på $\mathbf{N}_0$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} .$$

Middelværdi λ, varians λ.

Den negative binomialfordeling med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p er fordelingen på $\mathbf{N}_0$ med sandsynlighedsfunktion

$$p(t) = \binom{t+n-1}{t} p^n (1-p)^t .$$

Middelværdi $n\frac{1-p}{p}$, varians $n\frac{1-p}{p^2}$.

Grænsesætninger.

Den hypergeometriske fordeling kan, når stikprøvestørrelsen n er lille i forhold til det samlede antal kugler N, approksimeres med binomialfordelingen med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter $p = \frac{R}{N}$.

Binomialfordelingen kan, når p er lille og n er stor, approksimeres med Poissonfordelingen med parameter $\lambda = np$.

Kapitel 4: Middelværdi og varians.

Middelværdien eller **den forventede værdi** af en stokastisk variabel X på $\mathbf{R}$ med sandsynlighedsfunktion p er givet ved

$$\mathrm{E}X = \sum p(x)x ,$$

hvor summationen skal foretages over alle $x \in \mathbf{R}$ (eller alle x for hvilke $p(x) > 0$).

Hvis X er en stokastisk variabel på E med sandsynlighedsfunktion p og $f : E \to \mathbf{R}$ en reel funktion på E, kan middelværdien af den afledte stokastiske variable $Y = f(X)$ beregnes som

$$\mathrm{E}Y = \sum_{x \in E} p(x) f(x) \,.$$

Regneregler:

$\mathrm{E}(a + bY) = a + b\mathrm{E}Y$,

$\mathrm{E}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \mathrm{E}Y_1 + \cdots + \mathrm{E}Y_n$.

For $Y_1, \ldots, Y_n$ uafhængige: $\mathrm{E}(Y_1 \ldots Y_n) = \mathrm{E}Y_1 \times \ldots \times \mathrm{E}Y_n$.

Indikatorfunktion: For $A \subseteq E$ defineres $1_A : E \to \mathbf{R}$ ved $1_A(x) = 1$ for $x \in A$ og $1_A(x) = 0$ for $x \in E \setminus A$. Der gælder så $\mathrm{E}1_A(X) = P(X \in A)$.

Variansen for en reel stokastisk variabel Y er

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{E}((Y - \mathrm{E}Y)^2) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}Y)^2 \,.$$

Standardafvigelsen er kvadratroden af variansen.

Kovariansen mellem X og Y defineres ved

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)) = \mathrm{E}(XY) - (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}Y) \,.$$

Der gælder følgende regneregler:

$\mathrm{var}(a + bX) = b^2 \mathrm{var}(X)$,

$\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}(X)$,

$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$,

$\mathrm{cov}(X, aY + bZ) = a\,\mathrm{cov}(X, Y) + b\,\mathrm{cov}(X, Z)$,

$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2 \mathrm{var}(X) + b^2 \mathrm{var}(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y)$.

For stokastiske variable $X_1, \ldots, X_n$ med $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ for $i \neq j$ (hvilket specielt gælder hvis de er stokastisk uafhængige) er

$\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n)$.

Korrelationen mellem X og Y er

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}}$$

Korrelationer ligger mellem –1 og 1. De ekstreme værdier –1 og 1 antages når X og Y er ens på nær lineært affin transformation.

Chebychevs ulighed siger, at hvis X er en reel stokastisk variabel med middelværdi μ og varians σ^2 så er, for ethvert positivt tal a,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

De store tals lov siger at hvis $X_1, X_2, \ldots$ er uafhængige, identisk fordelte med $\mathrm{E}X_i = \mu$ og $\mathrm{E}(X_i^2) < +\infty$, så vil

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

for ethvert $\epsilon > 0$.

Kapitel 5: Fordelinger på den reelle akse.

Lad E være et interval på $\mathbf{R}$ (evt. $E = \mathbf{R}$). En **sandsynlighedstæthed** på E er en funktion $p : E \to \mathbf{R}$) som opfylder

(p1) $p(x) \geq 0$, og

(p2) $\int_E p(x)\, dx = 1$.

Den til p hørende **kontinuerte sandsynlighedsfordeling** P er givet ved

$$P(A) = \int_A p(x)\, dx = \int 1_A(x) p(x)\, dx\,.$$

Lad X være en stokastisk variabel med en kontinuert fordeling. Tæthedens **lokale fortolkning** går ud på, at der for små intervaller $[x_0, x_0 + h]$ gælder $P(X \in [x_0, x_0 + h]) \approx p(x_0)h$.

En kontinuert sandsynlighedsfordeling kan alternativt beskrives ved sin **fordelingsfunktion**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\, dz\,,$$

der kan fortolkes som et ubestemt integral af tætheden. Omvendt er $p(x) = F'(x)$ i alle kontinuitetspunkter for p.

Transformation. Hvis $t : E \to F$ er en stykkevis konstant transformation kan $Y = t(X)$ fortolkes som stokastisk variabel på F med diskret fordeling, givet ved sandsynlighedsfunktionen

$$q(y) = P(t(X) = y) = P(X \in t^{-1}(y)) = \int_{t^{-1}(y)} p(x)\, dx\,.$$

Hvis $t : E \to F$ afbilder intervallet E bijektivt, monotont og kontinuert differentiabelt på et andet interval F kan $Y = t(X)$ fortolkes som stokastisk variabel på F med kontinuert fordeling givet ved tætheden

$$q(y) = \frac{p(x)}{t'(x)} = \frac{p\left(t^{-1}(y)\right)}{|t'\left(t^{-1}(y)\right)|}\,.$$

Denne relation huskes (og forstås) lettest på formen

$$p(x)|\, dx| = q(y)|\, dy|$$

hvor man kan dividere over med enten $|\,dx|$ eller $|\,dy|$, afhængigt af om det er transformationens differentialkvotient $\frac{dy}{dx}$ eller den omvendte transformations differentialkvotient $\frac{dx}{dy}$ der er lettest at opskrive som funktion af y.

Dette resultat kan også benyttes for kontinuert differentiable transformationer som ikke er bijektive. Så skal $q(y)$ blot udtrykkes som en sum af bidrag af samme form som ovenfor fra de punkter x, der afbildes over i y.

Lineært affin transformation. Hvis X har tæthed p får $Y = a + bX$ ($b \neq 0$) tæthed

$$q(y) = \frac{1}{|b|} p\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

Fordelingen med tæthed q siges her at være fremkommet af fordelingen med tæthed p ved, at denne er forsynet med **positionsparameter** a og **skalaparameter** b.

Transformation til rektangulær fordeling. Hvis X har en kontinuert fordeling med fordelingsfunktion F vil $R = F(X)$ være rektangulært fordelt på enhedsintervallet. Omvendt kan en stokastisk variabel med fordelingsfunktion F konstrueres ud fra en rektangulært fordelt variabel R ved $X = F^{-1}(R)$.

Middelværdien af en stokastisk variabel X med tæthed p er givet ved

$$\mathrm{E}X = \int p(x)x\,dx\,.$$

Middelværdien af en afledt reel stokastisk variabel $Y = f(X)$ kan udregnes som

$$\mathrm{E}Y = \int p(x)f(x)\,dx\,.$$

Definitionen af **varians, kovarians og korrelation** kan overtages uændret fra det diskrete tilfælde, og der gælder de samme regneregler.

Den centrale grænseværdisætning siger, at hvis $X_1, X_2, \ldots$ er uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi μ og varians σ^2, så vil fordelingen af

$$U_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right)$$

konvergere mod en normeret normalfordeling, i den forstand at

$$P\left(U_n \leq u\right) \to \Phi(u)\,.$$

Oversigt over kontinuerte fordelinger (også fra senere kapitler).

Den rektangulære fordeling eller **ligefordelingen** på enhedsintervallet har tætheden 1 på enhedsintervallet (og 0 udenfor). Middelværdi $\frac{1}{2}$, varians $\frac{1}{12}$. Ligefordelingen på et vilkårligt interval $[a, b]$ (som fås ved lineært affin transformation af ligefordelingen på enhedsintervallet) har tæthed $\frac{1}{b-a}$ på intervallet (og 0 udenfor).

Den normerede eksponentialfordeling har tæthed e^{-x} på $[0, +\infty[$; middelværdi 1 og varians 1. Eksponentialfordelingen med **skalaparameter** b har tæthed $\frac{1}{b}e^{-x/b}$; middelværdi b, varians b^2.

Cauchyfordelingen har tæthed (på hele den reelle akse)

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \,.$$

Middelværdi og varians er udefinerede.

Den tosidede eksponentialfordeling har tæthed (på hele den reelle akse)

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \,.$$

Middelværdi 0, varians 2.

Den normerede normale fordeling har tæthed (på hele den reelle akse)

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \,.$$

Middelværdi 0, varians 1. Fordelingsfunktionen for den normale fordeling betegnes

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\, dx \,.$$

Den normale fordeling med middelværdi μ og varians σ^2 (der kan fortolkes som fordelingen af $X = \mu + \sigma U$ for U normeret normalfordelt) har tæthed

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \,.$$

Den logaritmiske normalfordeling, fordelingen af $Y = \exp(X)$ hvor X er normalfordelt med middelværdi μ og varians σ^2, har tætheden

$$p(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

på den positive halvakse. Middelværdi $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Γ–**fordelingen** (udtales gamma–fordelingen) med **formparameter** λ er fordelingen med tæthed

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x}$$

på den positive halvakse. Middelværdi λ, varians λ.

χ^2–**fordelingen** (udtales ki–i–anden–fordelingen) med f **frihedsgrader** er (for $f \in \mathbf{N}$) fordelingen af $2X$ hvor X er Γ–fordelt med formparameter $\frac{f}{2}$. Kan også fortolkes som fordelingen af $U_1^2 + \cdots + U_f^2$, hvor $U_1, \ldots, U_f$ er uafhængige, normeret normalfordelte. Middelværdi f, varians $2f$.

B–fordelingen (udtales beta–fordelingen) med **formparametre** λ_1 og λ_2 er fordelingen med tæthed

$$p(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\lambda_1, \lambda_2)}\, x^{\lambda_1 - 1}(1-x)^{\lambda_2 - 1}$$

på [0,1]. Middelværdi $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, varians $\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2(\lambda_1+\lambda_2+1)}$.

F–fordelingen med **frihedsgradsantal** (f_1, f_2) er fordelingen af

$$F = \frac{X_1/f_1}{X_2/f_2}$$

hvor X_1 og X_2 er uafhængige, χ^2–fordelte med henholdsvis f_1 og f_2 frihedsgrader.

T–fordelingen med f **frihedsgrader** er fordelingen af

$$T = \frac{U}{\sqrt{X/f}}$$

hvor U og X er uafhængige, U normeret normalfordelt og X χ^2–fordelt med f frihedsgrader. T^2 vil så være F–fordelt med $(1, f)$ frihedsgrader.

Kapitel 6: Fordelinger på reelle talrum.

Lad E være $\mathbf{R}^n$ eller et område i $\mathbf{R}^n$. En **sandsynlighedstæthed** på E er en funktion $p : E \to \mathbf{R}$ som opfylder

(p1) $p(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, og

(p2) $\int \cdots \int_E p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$.

Den til p hørende **kontinuerte sandsynlighedsfordeling** P er givet ved

$$P(A) = \int \cdots \int_A p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int \cdots \int 1_A(x_1, \ldots, x_n) p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Transformation. Hvis $t : E \to F$ er en stykkevis konstant transformation kan $Y = t(X)$ fortolkes som stokastisk variabel på F med diskret fordeling, givet ved sandsynlighedsfunktionen

$$q(y) = P(t(X) = y) = P(X \in t^{-1}(y))$$

$$= \int \cdots \int_{t^{-1}(y)} p(x)\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Fordelingen af $(X_1, \ldots, X_k)$ $(k < n)$, altså den marginale fordeling af de første k variable, er igen en kontinuert fordeling med tæthed

$$q(x_1, \ldots, x_k) = \int \cdots \int p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Hvis $t : E \to F$ afbilder E bijektivt og kontinuert differentiabelt på et andet område $F \subseteq \mathbf{R}^n$ kan $Y = t(X)$ fortolkes som stokastisk variabel på F med kontinuert fordeling givet ved tætheden

$$q(y_1, \ldots, y_n) = \frac{p\left(t^{-1}(y_1, \ldots, y_n)\right)}{|\det Dt\left(t^{-1}(y_1, \ldots, y_n)\right)|}.$$

Stokastisk uafhængighed. $X_1, \ldots, X_n$ siges at være stokastisk uafhængige hvis tætheden kan skrives på formen

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \ldots p_n(x_n)$$

hvor $p_1, \ldots, p_n$ er sandsynlighedstætheder på $\mathbf{R}$.

Foldning. Lad X_1 og X_2 være reelle stokastiske variable, uafhængige med tætheder p_1 og p_2. Så har fordelingen af $Y = X_1 + X_2$ tætheden

$$q(y) = \int p_1(y - x) p_2(x)\, dx.$$

Den normale fordelings foldningsegenskab. Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uafhængige, normalfordelte med middelværdier $\mu_1, \ldots, \mu_n$ og varianser $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, så er $X_1 + \cdots + X_n$ igen normalfordelt med middelværdi $\mu_1 + \cdots + \mu_n$ og varians $\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$.

Kapitel 7: Den normale fordelings teori.

Γ–funktionen:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx\ , \quad \lambda > 0\,.$$

B–funktionen:

$$\mathrm{B}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 x^{\lambda_1 - 1}(1-x)^{\lambda_2 - 1}\, dx\ , \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0\,.$$

Γ–funktionens funktionalligning: $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$.

Relation mellem Γ– og B–funktionerne:

$$\mathrm{B}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Transformationsresultater. Hvis X_1 og X_2 er uafhængige, Γ–fordelte med formparametre λ_1 og λ_2, så er

$$S = X_1 + X_2 \qquad \text{og} \qquad Z = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$$

stokastisk uafhængige; S er Γ–fordelt med formparameter $\lambda_1 + \lambda_2$, og Z er B–fordelt med parametre (λ_1, λ_2).

Γ–fordelingens foldningsegenskab. Lad $X_1, \ldots, X_n$ være uafhængige, Γ–fordelte med formparametre $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Så er $X_1 + \cdots + X_n$ Γ–fordelt med formparameter $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Lad $U_1, \ldots, U_n$ være uafhængige, normeret normalfordelte. Betragt for $k < n$ de to afledte variable

$$Z = \frac{U_1^2 + \cdots + U_k^2}{U_1^2 + \cdots + U_n^2} \qquad \text{og} \qquad S = U_1^2 + \cdots + U_n^2.$$

Da er Z og S stokastisk uafhængige. Z er B–fordelt med parametre $\frac{k}{2}$ og $\frac{n-k}{2}$, og S er χ^2–fordelt med n frihedsgrader. Endvidere er

$$V = \frac{(U_1^2 + \cdots + U_k^2)/k}{(U_{k+1}^2 + \cdots + U_n^2)/(n-k)} = \frac{(n-k)Z}{k(1-Z)}$$

F–fordelt med $(k, n-k)$ frihedsgrader.

Lad $Y_1, \ldots, Y_n$ være stokastisk uafhængige, identisk normalfordelte med middelværdi μ og varians σ^2, og definer

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)\ , \qquad \mathrm{SSD} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Så er $\bar{Y}$ og SSD stokastisk uafhængige, $\bar{Y}$ normalfordelt $(\mu, \sigma^2/n)$ og SSD χ^2–fordelt med $n-1$ frihedsgrader og skalaparameter σ^2. Hvis $\mu = 0$ er

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\mathrm{SSD}}}$$

T-fordelt med $n-1$ frihedsgrader.

Hvis $U_1, \ldots, U_n$ er uafhængige, normeret normalfordelte, siges $U = (U_1, \ldots, U_n)$ at være (n–dimensionalt) normeret normalfordelt. Den lineært affint transformerede variabel $X = \mu + CU$, hvor $\mu \in \mathbf{R}^n$ og C er en regulær $n \times n$–matrix, siges at være n–dimensionalt normalfordelt med middelværdivektor μ og kovariansmatrix $\Sigma = CC'$.