Tue Tjur
September 2008

Stat. MØK 2. år

Mysteriet om de tre døre

Forhistorien. Forestil dig, at du er blevet udpeget til at deltage i et TV–show. Ud over at gøre dig kendt — og dermed sikre dig en tilværelse hvor du kan leve af at deltage i mediebegivenheder sammen med andre kendte — giver dette dig chancen for med det samme at vinde en million. Showet går nemlig ud på følgende:

Studieværten viser dig og seerne tre døre, nummereret 1, 2 og 3 fra venstre. Han fortæller, at der bag en af dørene står en sæk med en million kr. Bag de andre døre er der ingenting. Hvis du kan udpege den rigtige dør er pengene dine. Studieværten siger, at han selv ved hvor pengene er, men før udsendelsen blev pengesækken placeret helt tilfældigt med sandsynlighed 1/3 for hver af de tre døre. Skråsikkert vælger du dør nr. 1. Da du har lært sandsynlighedsregning ved du jo, at det er fuldstændigt ligegyldigt hvilken du vælger, sandsynligheden for vælge rigtigt er under alle omstændigheder 1/3.

Men lige da du skal til at åbne den, siger studieværten "et øjeblik — prøv at se her". Han åbner dør nr. 3, og viser dig, at der ikke er noget bag den. "Er du sikker på, at du vil vælge dør nr. 1? Du må gerne vælge om" siger han. Totalt forvirret af denne uventede drejning, tilskuernes bifald, den larmende hornmusik og de mange kulørte lamper, står du (uheldigvis med åben mund) og overvejer hvad du skal gøre, og om du overhovedet har lyst til at blive kendt.

Her er to forslag til, hvordan du kan ræsonnere, hvis det bliver aktuelt.

Ræsonnement nr. 1. *Hvis jeg bare ignorer alt hvad studieværten finder på af underlige spidsfindigheder, og holder fast i mit oprindelige valg, er der jo stadig sandsynlighed 1/3 for at få pengene. Men så må der jo være sandsynlighed 2/3 for ikke at få dem. Det vil sige, at de med sandsynlighed 2/3 er bag dør 2 eller 3 — og det vil jo nu sige dør 2 ... "Jeg skifter til dør nummer 2" råber du begejstret.*

Dette ræsonnement er helt korrekt. Men det er vigtigt at gøre opmærksom på, at de sandsynligheder der tales om her er *ubetingede* sandsynligheder. Du gør ikke noget forsøg på at udregne en betinget fordeling af pengenes placering, givet den yderligere information studieværten har givet dig. Selv om du selvfølgelig på anden måde benytter din viden om, at dør nr. 3 ikke er den rigtige.

Ræsonnement nr. 2. *Lad* $X \in \{1,2,3\}$ *betegne nummeret på den rigtige dør.* X *er jo så, som udgangspunkt, ligefordelt på mængden* $\{1,2,3\}$. *Det du har fået at vide af studieværten er, at* $X \neq 3$, *eller at* $X \in \{1,2\}$. *Den betingede fordeling af* X, *givet* $X \in \{1,2\}$, *er ligefordelingen på* $\{1,2\}$. *Så dør 1 og 2 har begge sandsynlighed 1/2 for at* *være den rigtige. Der er altså ingen grund til at skifte. "Jeg holder fast i dør nummer 1", svarer du.*

Dette argument er forkert, eller kræver i hvert fald nogle yderligere antagelser (se model 2 nedenfor). Det du har fået at vide er nemlig ikke kun, at $X \in \{1,2\}$, men også *at studieværten under de givne omstændigheder vælger at fortælle dig det.* Du kan ikke vide, under hvilke omstændigheder han vælger det, og den betingede fordeling af X, givet studieværtens oplysninger, afhænger i høj grad af dette. Her er nogle eksempler på totale modeller, som også beskriver studieværtens opførsel, og hvilke resultater der kommer ud af dem. I det følgende går vi stadigvæk ud fra, at du starter med at vælge dør nummer 1.

Model 1. *Studieværten gør kun som beskrevet i indledningen, hvis pengene er bag ved dør nummer 1. Hvis de er bag dør nummer 2 eller 3 siger han bare "Ja, du har valgt dør nr. 1. Værsågod at lukke den op!"*

Hvis det er på den måde han opfører sig — og hvis du ved det på forhånd — vil det jo være en meget dårlig plan at skifte dør efter at han har åbnet dør nr. 3. Den betingede fordeling af X, givet studieværtens reaktion, kan beskrives således: Hvis han åbner dør 3 er pengene helt sikkert bag dør 1. Hvis han bare siger at du gerne må lukke op, er X ligefordelt på $\{2,3\}$. Om du kan få lov at vælge om i dette tilfælde siger historien ikke noget om.

Her er det måske lidt snyd at forestille sig, at studieværten gør noget der er fundamentalt anderledes end det han gjorde i den indledende fortælling. Så lad os i stedet se på

Model 2. *Studieværten lukker altid en dør op og viser at der ikke er noget bagved. Hvis pengene er bag dør nummer 1 eller 2 åbner han dør 3. Hvis de er bag dør 3 åbner han dør 2.*

Hvis studieværten følger denne strategi — og du ved at han gør det — har du ret gode chancer for at vinde. Hvis han åbner dør 3 er det du har fået at vide præcis at $X \in \{1,2\}$, så "Ræsonnement nr. 2" ovenfor er faktisk gyldigt. Hvis han åbner nummer 2 er der bare bingo, for så ved du at pengene er bag ved dør nummer 3.

Følgende model er måske den mest naturlige, fordi den ligestiller dør 2 og 3:

Model 3. *Studieværten lukker altid en dør op. Han åbner aldrig den du har valgt (som vi har antaget er nr. 1), og heller ikke den hvor pengene er. Hvis han har to døre at vælge imellem (dvs. hvis $X = 1$, så han kan vælge mellem nr. 2 og nr. 3) vælger han tilfældigt, f.eks. ved (skjult) at kaste en mønt.*

Lad $Y \in \{2,3\}$ betegne nummeret på den dør som studieværten åbner. For at få et overblik kunne man lave en 3×2 tabel, der viser sandsynlighedsfunktionen for (X, Y). Vi nøjes med her at bemærke at

$$P(X=1|Y=3) = \frac{P(X=1 \text{ og } Y=3)}{P(Y=3)}$$

$$= \frac{P(X=1 \text{ og } Y=3)}{P(X=1 \text{ og } Y=3) + P(X=2 \text{ og } Y=3) + P(X=3 \text{ og } Y=3))}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}\,.$$

Eftersom vi åbenbart har

$P(X = 3|Y = 3) = 0$

må der således gælde

$P(X = 2|Y = 3) = 2/3$.

Det vil sige at den betingede sandsynlighed for at pengene er bag ved dør nummer 2, givet at studieværten åbner dør 3, er 2/3. Så denne model giver på en måde samme facit som "Ræsonnement nr. 1", men denne gang i form af betingede sandsynligheder, givet studieværtens reaktion.

Tilføjelse. Hvis du stadig er i tvivl, og mener at der trods alt er et eller andet rigtigt ved ræsonnement nr. 2, så forestil dig følgende situation. Historien er den samme, der er bare 100 døre i stedet for tre. Stadig ved du, at pengene er placeret tilfældigt (ligefordelt) bag en af dørene. Da du har lært sandsynlighedsregning ved du, at det er lige meget hvilken dør du vælger, så du vælger nummer 1. Lige da du skal til at åbne den, siger studieværten "vent lige lidt" og åbner 98 andre døre og viser dig at der ikke er noget bagved dem. Kun nummer 1 og nummer 83 er stadig lukkede. Da du har lært sandsynlighedsregning ved du, at hver af disse døre har sandsynlighed 1/2 for at være den rigtige. Så du vælger nummer 1, for at slippe for at gå så langt med en tung sæk.